

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

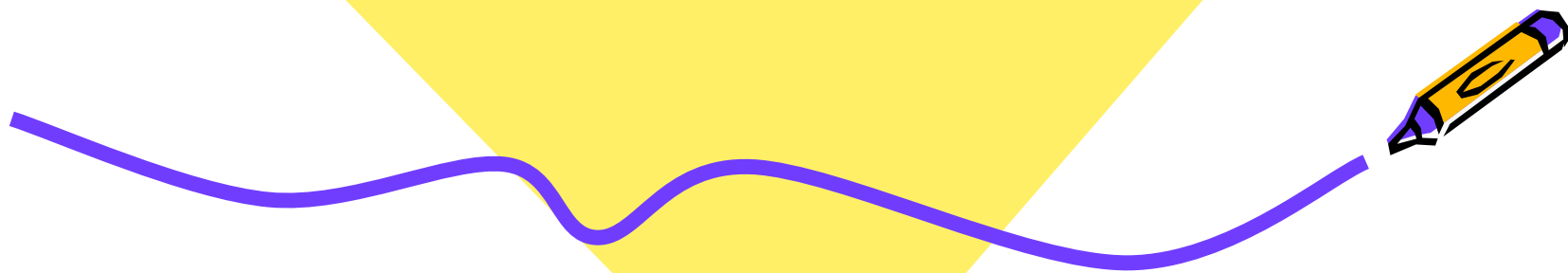


Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:

Fedorovkniga.jimdo.com

Определители, их свойства и вычисления



Определители, их свойства и вычисления



Определение: Определителем называется число, вычисленное определённым порядком по квадратной таблице чисел, составленной из n -строк и n -столбцов (n -порядок определителя).

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \begin{matrix} a_{22} \\ (-a_{12}) \end{matrix} \rightarrow a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \rightarrow x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

a - коэффициент перед неизвестной.

b - свободный член.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

D - главный определитель, состоящий из коэффициентов перед неизвестными.





Правило: Определитель 2-го порядка вычисляется как разность произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

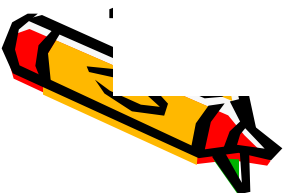
Правило: Определитель для соответствующей строки составляется из главного определителя, заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

$$x_j = \frac{D_{xj}}{D} \quad (j = 1, n).$$

Метод Саррусса (треугольника) для вычисления определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{32}a_{11} \quad (2)$$





Значение определителя вычисляется как сумма чисел 1, 2.

Вычисление определителя n -го порядка.

Определение: Минором элемента a_{ij} для определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из исходного определителя вычёркиванием i -строки j -столбца.

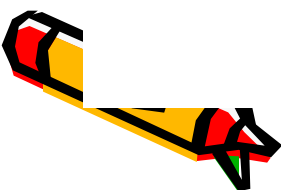
Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ для $a_{23} \rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$

Определение: Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число, вычисленное по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} (-6) = 6$$

Определение: Определителем называется число равное сумме произведений элементов какой-то строки (столбца) на соответствующее этим элементам алгебраическое дополнение.

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$





Замечание: Формулы вычисления и свойства определителя сформулированные для строки, аналогичны и для столбца.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если в нём заменить строки на соответствующие столбцы.

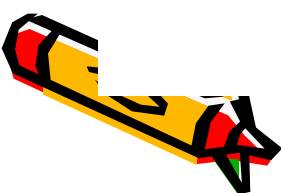
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

2. Определитель сменит знак, если поменять местами рядом стоящие строки.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -D$$

3. Определитель, имеющий две одинаковые строки равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$$





4. Определитель, имеющий две пропорциональные строки равен 0.

$$a_{21} = ka_{11} \quad ; \quad a_{22} = ka_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{12}a_{11} = k(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}) = 0$$

$$k = const$$

5. Постоянный множитель какой-то строки можно выносить за знак определителя.

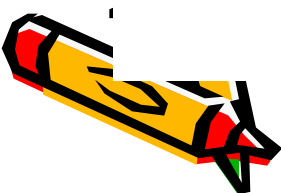
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = kD = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} = 2 \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

6. Определитель, у которого какая-то строка, состоит из одних нулей равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{по 5 свойству при } k = 0)$$





7. Если в определителе элементы какой-то строки представлены в виде суммы 2-х элементов, то такой определитель вычисляется через сумму 2-х определителей

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} = \\ &= (a_{22}a_{21} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-то строки прибавить элементы другой строки, умноженные на один и тот же коэффициент.

Замечание: Результат этого действия заносится в ту строку, к которой прибавляется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{11}k & a_{22} + a_{12}k \end{vmatrix} \stackrel{\text{7се-ео}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}k & a_{12}k \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

9. Сумма произведений элементов какой-то строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = a_{11}(-a_{12}) + a_{12} \times a_{11} = 0$$





Пример:

Метод понижения порядка
(8 свойство)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{8 свойство} \\ =}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$1\text{стр} + 3\text{стр},$

$1\text{стр} \times (-2) + 4\text{стр}.$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - (-6) = -34.$$

$1\text{стр} \times (-4) + 2\text{стр};$

$1\text{стр} + 2\text{стр}.$

