ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Определители, их свойства и вычисления

Определители, их свойства и вычисления

Определение: Определителем называется число, вычисленное определённым порядком по квадратной таблице чисел, составленной из n -строк и n -столбцов (n -порядок определителя).

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \left| \begin{matrix} a_{22} \\ (-a_{12}) \end{matrix} \right. \rightarrow a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

a -коэффициент перед неизвестной.

b -свободный член.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

D -главный определитель, состоящий из коэффициентов перед неизвестными.

Правило: Определитель 2-го порядка вычисляется как разность произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

Правило: Определитель для соответствующей строки составляется из главного определителя, заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D} \qquad x_i = \frac{D_{xj}}{D} \quad \left(j = \overline{1,n} \right).$$

Метод Саррусса (треугольника) для вычисления определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

Значение определителя вычисляется как сумма чисел 1, 2.

Вычисление определителя n-го порядка.

Определение: Минором элемента a_{ij} для определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из исходного определителя вычёркиванием i -строки j -столбца.

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\textit{для } a_{23} \rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8-14 = -6$

Определение: Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число, вычисленное по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = 6$$

Определение: Определителем называется число равное сумме произведений элементов какой-то строки (столбца) на соответствующее этим элементам алгебраическое дополнение.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Замечание: Формулы вычисления и свойства определителя сформулированные для строки, аналогичны и для столбца.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если в нём заменить строки на соответствующие столбцы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

2. Определитель сменит знак, если поменять местами рядом стоящие строки.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -D$$

3. Определитель, имеющий две одинаковые строки равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$$

4. Определитель, имеющий две пропорциональные строки равен 0.

$$a_{21} = ka_{11} \quad ; a_{22} = ka_{12}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{12}a_{11} = k\left(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}\right) = 0$$

$k = const$

5. Постоянный множитель какой-то строки можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = kD = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} = 2 \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 .$$

6. Определитель, у которого какая-то строка, состоит из одних нулей равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(по 5 свойству при к = 0)}$$

7. Если в определителе элементы какой-то строки представлены в виде суммы 2-х элементов, то такой определитель вычисляется через сумму 2-х определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11}+b_{11}\right) a_{22} - \left(a_{12}+b_{12}\right) a_{21} =$$

$$= \left(a_{22}a_{21} - a_{12}a_{21}\right) + \left(b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-то строки прибавить элементы другой строки, умноженные на один и тот же коэффициент.

Замечание: Результат этого действия заносится в ту строку, к которой прибавляется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a_{11}k & a_{22}+a_{12}k \end{vmatrix} \overset{7св-во}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}k & a_{12}k \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

9. Сумма произведений элементов какой-то строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \to a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = a_{11}\left(-a_{12}\right) + a_{12} \times a_{11} = 0$$

Пример:

Метод понижения порядка
(8 свойство)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{8 свойство}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$1 стр + 3 стр,$

$1 стр \times (-2) + 4 стр.$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - (-6) = -34.$$

$1 стр \times (-4) + 2 стр;$

$1 стр + 2 стр.$