ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Скалярные и векторные величины, виды векторов

Линейные операции над векторами

Линейно – зависимая система векторов по базису. Ортонормированный базис

Декартовая и полярная система координат

Линейные операции над векторами в координатной форме

Проекция вектора на вектор

Скалярное произведение векторов и его свойства

Скалярное произведение векторов в координатах и его приложения

Ориентация тройки векторов

Векторное произведение векторов и его свойства

Векторное произведение в координатах и его приложения

Смешанное произведение векторов и его свойства

Смешанные произведения векторов в координатах и его приложения

Скалярные и векторные величины, виды векторов

Определение: Скалярной называется величина, которая характеризуется только своим значением $(m, T^{o}C)$.

Определение: Векторной называется величина, которая характеризуется и значением и направлением $(\overline{V}, \overline{a}, \overline{F})$.

Определение: Геометрическим вектором называется направленный отрезок $(\overline{a}, \overrightarrow{AB}, a)$

Определение: Длиной вектора или его модулем называется длина направленного отрезка $(|\overline{a}|, |\overrightarrow{AB}|)$

Виды векторов

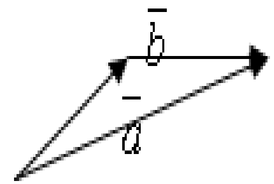
1. Ноль вектор – длина которого равна нулю. $|\bar{0}| = 0$.
2. Коллинеарные вектора – два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых или один из двух векторов является ноль - вектором.
3. Компланарные – три вектора называются компланарными если оно лежат в одной плоскости.

Коллинеарные вектора различают на однонаправленные
И разнонаправленные

Линейные операции над векторами

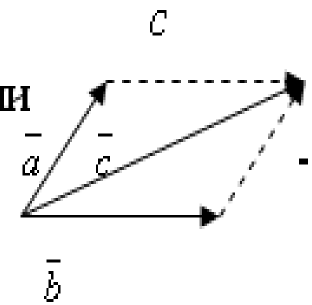
1. Равенство векторов: $\overline{a} = \overline{b}$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

2. Умножение на скаляр: $\overline{b} = k\overline{a}$, если $|\overline{b}| = k|\overline{a}| \begin{cases} k > 0, \overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a} \\ k < 0, \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a} \\ k = 0, \overline{b} = \overline{a} \end{cases}$.



- правило треугольника

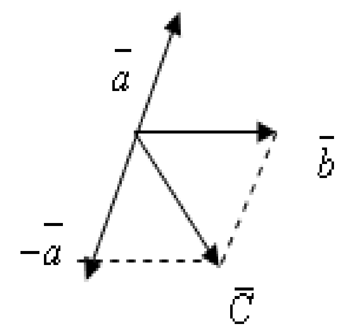
3. Сложение векторов: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, если



- правило параллелограмма

4. Вычитание векторов: $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$

Представление разности через сумму: $\bar{c} = \bar{b} + \left(-\bar{a}\right)$



Линейно – зависимая система векторов по базису. Ортонормированный базис

Определение: Линейной комбинацией векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ называется вектор $\overline{a}$, вычисляемый по формуле:

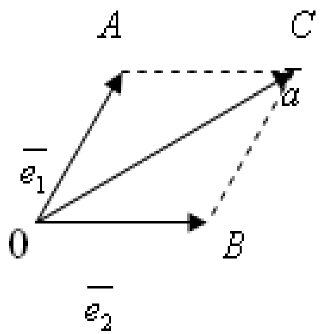
$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e_1} + \overline{\alpha_2 e_2} + \ldots + \alpha_n \overline{e_n},\ \alpha_i - const\ \left(i = \overline{1, n}\right).$$

Определение: Линейно – зависимой системой векторов называется система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$, для которой в линейной комбинации этих векторов хотя бы 1 из коэффициентов $\alpha \neq 0$.

Определение: Линейно – независимой называется система векторов, у которой в её линейной комбинации все $\alpha = 0$.

Определение: Разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ называется представление этого вектора в виде линейной комбинации линейно – зависимых векторов.

Теорема: Если $\bar{e}_1\bar{e}_2$, то вектор $\bar{a}$ можно разложить по базису.



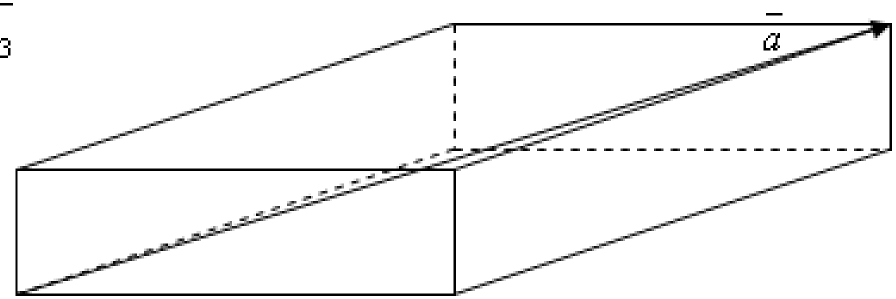
$$AC \parallel OB \rightarrow \overline{OB} = \alpha_1 \bar{e}_1$$

$$CB \parallel OA \rightarrow \overline{OA} = \alpha_2 \bar{e}_2$$

$$\bar{a} = \overline{OA} + \overline{OB},\ \bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$$

Теорема: Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ не компланарны, то вектор $\bar{a}$ можно разложить по базису

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

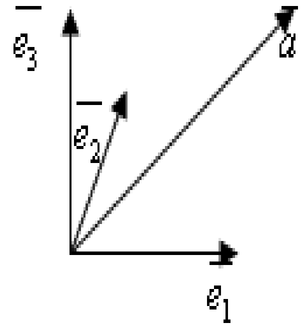


Определение: Ортонормированным базисом называется система взаимо - перпендикулярных векторов (орт).

$$\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k} \quad ; \left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1 .$$

Декартовая и полярная система координат

Определение: Декартовой называется система, состоящая из точки начала отсчёта 0 и базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_N}$.

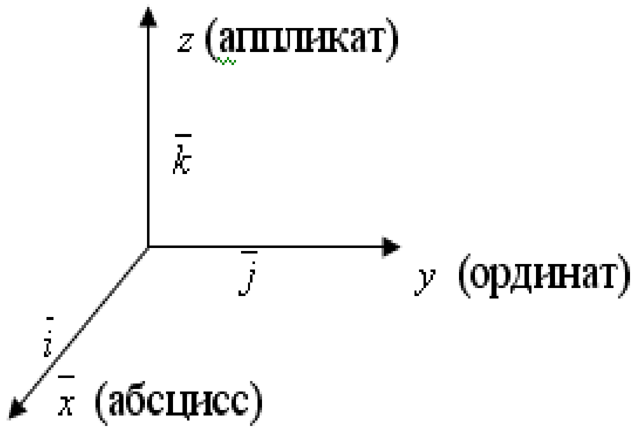


$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3}$$

Определение: Координатами вектора и точки конца этого вектора называются константы, стоящие перед базисными векторами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Определение: Декартовой прямоугольной системой координат называется система образованная ортонормированным базисом.

Определение: Осями координат называются прямые, проходящие через базисные вектора.



Определение: Полярной системой координат называется система, состоящая из полюса 0, полярной оси (ПО), полярного угла φ, и полярного радиуса r

$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$ - формулы перехода из декартовой в полярную систему.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}\quad;\quad \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$ - формулы перехода из полярной в декартовую.

Линейные операции над векторами в координатной форме

$$\bar{a} = a_x\bar{e_1} + a_y\bar{e_2} + a_z\bar{e_3}$$

$$\bar{b} = b_x\bar{e_1} + b_y\bar{e_2} + b_z\bar{e_3}$$

Замечание: Линейные операции можно производить в произвольной системе координат.

1. Равенство – два вектора называются равными, если равны их соответствующие координаты.

$$a_x = b_x; a_y = b_y; a_z = b_z.$$

2. Умножение вектора на скаляр – координаты вектора произведения на скаляр определяются произведением соответствующих координат на этот скаляр.

$$\bar{c} = k\bar{a}, \text{ тогда } \bar{c}\left(ka_x, ka_y, ka_z\right).$$

3. Сложение и вычитание – координаты алгебраической суммы двух векторов определяется алгебраической суммой соответствующих координат векторов слагаемых.

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} = a_x\bar{e}_1 + a_y\bar{e}_2 + a_z\bar{e}_3 + b_x\bar{e}_1 + b_y\bar{e}_2 + b_z\bar{e}_3 =$$

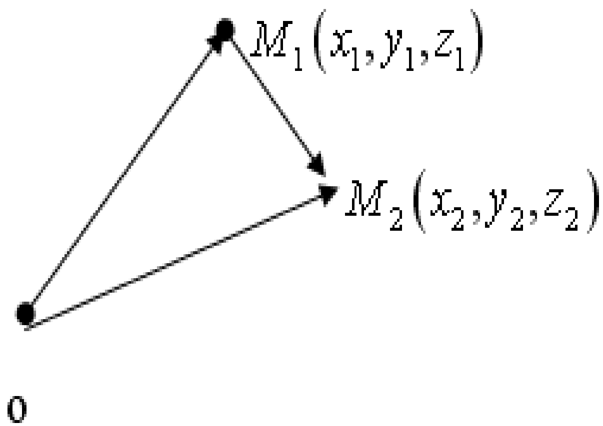
$$= (a_x + b_x)\bar{e}_1 + (a_y + b_y)\bar{e}_2 + (a_z + b_z)\bar{e}_3$$

$$\rightarrow \bar{d}\left((a_x \pm b_x),(a_y \pm b_y),(a_z \pm b_z)\right)$$

4. Коллинеарность – два вектора коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k\ .$$

5. Координаты вектора, заданного 2-мя точками, определяются разностью координат точек конца и начала вектора.



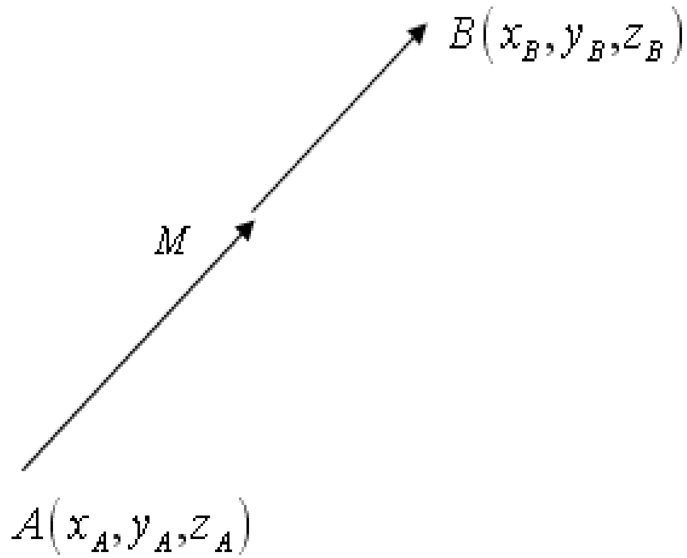
$\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$

$\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \to M_1M_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

6. Координаты точки $M(x,y,z)$ делящие отрезок AB на части в соотношении:

$$\frac{MB}{AM}=k$$



$\overrightarrow{MB}(x_B-x, y_B-y, z_B-z)$

$\overrightarrow{AM}(x-x_A, y-y_A, z-z_A)$

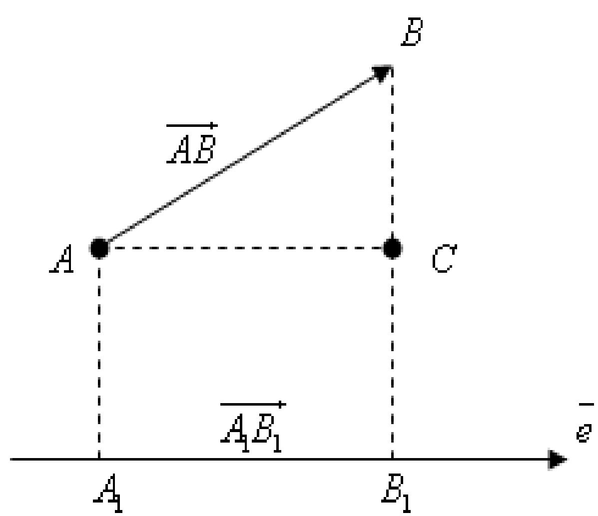
$$\overrightarrow{MB}\ \overrightarrow{AM}\ \xrightarrow{4\,св-во}\ \frac{x_B-x}{x-x_A}=k;\quad x_B-x=kx-kx_A\rightarrow x=\frac{x_B+kx_A}{k+1},\ y=\frac{y_B+ky_A}{k+1},\ z=\frac{z_B+kz_A}{k+1}$$

Проекция вектора на вектор

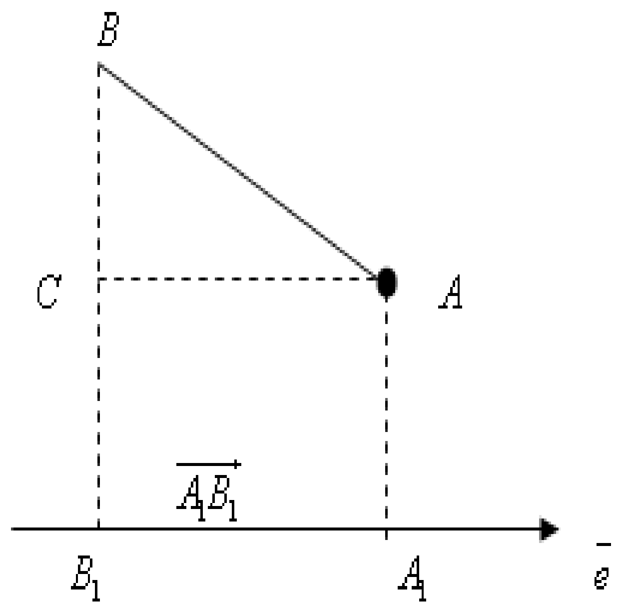
Определение: Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\bar{e}$ ($Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AB}$) называется $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ взятый со знаком плюс, если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\bar{e}$ и со знаком минус, если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\bar{e}$ (A_1-проекция точки A на вектор $\bar{e}$, B_1-проекция точки B на вектор $\bar{e}$).

Правило вычисления проекции.

1.

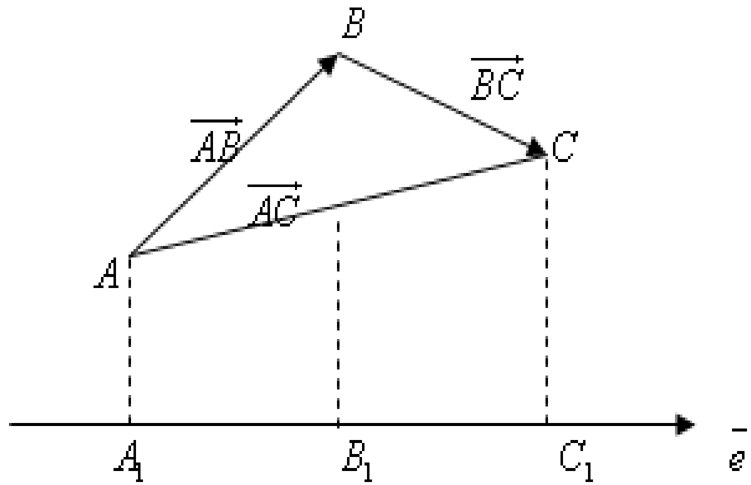


$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$; $\qquad Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$.



$$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos(\pi-\alpha) = -\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha, \qquad Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha.$$

2. Проекция суммы 2-х векторов равна сумме проекции каждого из этих векторов.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\quad Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|$; $\quad Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$; $\quad Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{B_1C_1}\right|$

$\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| + \left|\overrightarrow{B_1C_1}\right| \rightarrow Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AC} = Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{AB} + Пр_{\bar{e}}\overrightarrow{BC}$

Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение: Скалярным произведением двух векторов называется число равное модулю этих векторов на косинус угла между ними.

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\alpha$$

где $\alpha=\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}$

Свойства:

1. Скалярное произведение равно нулю, если вектора перпендикулярны.

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\cos\alpha=0\rightarrow\left(\overline{a};\overline{b}\right)=0,\overline{a}\perp b.$$

2. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\overline{a^2}=\left(\overline{a},\overline{a}\right)=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{a}\right|\cos 0\rightarrow\overline{a^2}=\left|\overline{a}\right|^2$$

3. Скалярное произведение перестановочно.

$$\left(\overline{a};\overline{b}\right)=\left(\overline{b};\overline{a}\right)$$

4. Вычисление скалярного произведения через проекцию.

$$\left(\overline{a};\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}\equiv\left|\overline{b}\right|\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

$$\left(k\overline{a};\overline{b}\right)=k\left(\overline{a};\overline{b}\right)$$

6. Скалярное произведение подчиняется распределительному закону.

$$\left(\overline{a},\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\right)=\left(\overline{a},\overline{b}\right)+\left(\overline{a},\overline{c}\right)$$

Скалярное произведение векторов в координатах и его приложения

Теорема: Скалярное произведение векторов в координатах ортонормированного базиса определяется как сумма произведений соответствующих координат векторов сомножителей.

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k};\ \ \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k};$$

$$(\bar{a},\bar{b}) = \left(\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right),\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right)\right) = a_x b_x \bar{i}^2 + a_x b_y\left(\bar{i}\,\bar{j}\right) + a_x b_z\left(\bar{i}\bar{k}\right) +$$

$$+ a_y b_x\left(\bar{j}\bar{i}\right) + a_y b_y \bar{j}^2 + a_y b_z\left(\bar{j}\bar{k}\right) + a_z b_x\left(\bar{k}\bar{i}\right) + a_z b_y\left(\bar{k}\,\bar{j}\right) + a_z b_z \bar{k}^2$$

$i^2 = j^2 = k^2 = 1$, т.к. $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – единичные вектора, а остальные произведения равны нулю, т.к. орты взаимно перпендикулярны (1 свойство скалярного произведения).

$$(\bar{a},\bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Приложения

1. Условие перпендикулярности векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

2. Вычисление модуля вектора:

$$\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2 \to \left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{\left(\overline{a}, \overline{a}\right)} \to \left|\overline{a}\right| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z};$$

3. Вычисление проекции:

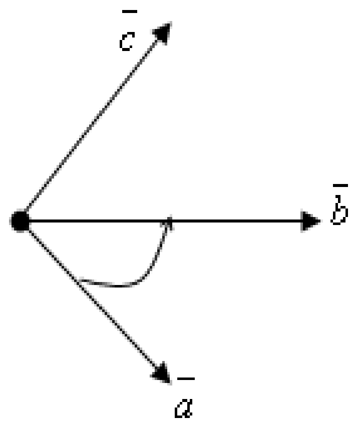
$$\boxed{\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| Пр_{\overline{a}} \overline{b} \to Пр_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|} \to Пр_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}}}$$

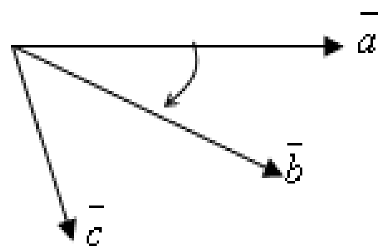
4. Вычисление угла между векторами:

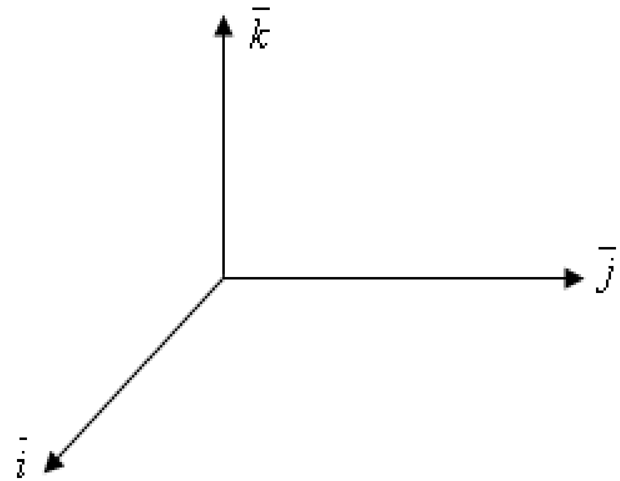
$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \left|\overline{b}\right| \cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right| \left|\overline{b}\right|} \to \cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}\sqrt{b^2{}_x + b^2{}_y + b^2{}_z}}$$

Ориентация тройки векторов

Определение: Тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется правой, если кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ осуществляется против часовой стрелки при условии, если смотреть с конца вектора $\bar{c}$.







Система координат

Определение: Тройка векторов называется левой, если кратчайший поворот осуществляется по часовой стрелке.

Векторное произведение векторов и его свойства

Определение: Векторным произведением 2-х векторов называется вектор $\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]$,

для которого выполняются 3 следующих условия:

1. $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\alpha$ 2. $\bar{c}+\bar{a}, c\perp b$ 3. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку

Свойства.

1. Векторное произведение равно 0, если 2 вектора коллениарны: $\bar{c}=0$, если $\bar{a}\parallel\bar{b}$, т.к. $\beta=0\to\sin\beta=0$.
2. Векторное произведение антиперестановочно: $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\bar{b},\bar{a}\right]$, т.к изменится ориентация тройки векторов.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак произведения: $\left[k\bar{a},\bar{b}\right]=k\left[\bar{a},\bar{b}\right]$.
4. Векторное произведение подчиняется распределительному закону: $\left[\bar{a}\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\right]=\left[\bar{a},\bar{b}\right]+\left[\bar{a},\bar{c}\right]$

Векторное произведение в координатах и его приложения

Теорема: Векторные произведения в координатах ортонормированного базиса определяется определителем, первая строка которого составлена из орт, 2-я и 3-я строки из координат векторов сомножителей.

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \quad (1)$$

Доказательство

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k};\ \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k};$$

а) Разложим определитель 1 по первой строке:

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\bar{i}\left(a_yb_z-b_ya_z\right)-\bar{j}\left(a_xb_z-b_xa_z\right)+\bar{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$$

б) вычислим векторное произведение другим способом:

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)\right]=$$

$$=\underline{a_xb_x\left[\bar{i},\bar{i}\right]}+a_xb_y\left[\bar{i},\bar{j}\right]+a_xb_z\left[\bar{i},\bar{k}\right]+$$

$$+a_yb_x\left[\bar{j},\bar{i}\right]+\underline{a_yb_y\left[\bar{j},\bar{j}\right]}+a_yb_z\left[\bar{j},\bar{k}\right]+$$

$$+a_zb_x\left[\bar{k},\bar{i}\right]+a_zb_y\left[\bar{k},\bar{j}\right]+\underline{a_zb_z\left[\bar{k},\bar{k}\right]}$$

$\left[\bar{i},\bar{j}\right]=\bar{k},\quad \left[\bar{k},\bar{i}\right]=\bar{j},\quad \left[\bar{j},\bar{k}\right]=\bar{i}$, остальные векторные произведение вычисляются по 2 свойству. Подчёркнутые элементы равны нулю по 1 свойству векторного произведения.

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=a_xb_y\bar{k}+a_xb_z\left(-\bar{j}\right)+a_yb_x\left(-\bar{k}\right)+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}+a_zb_y\left(-\bar{i}\right)=$$

$$=i\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\bar{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\bar{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$$

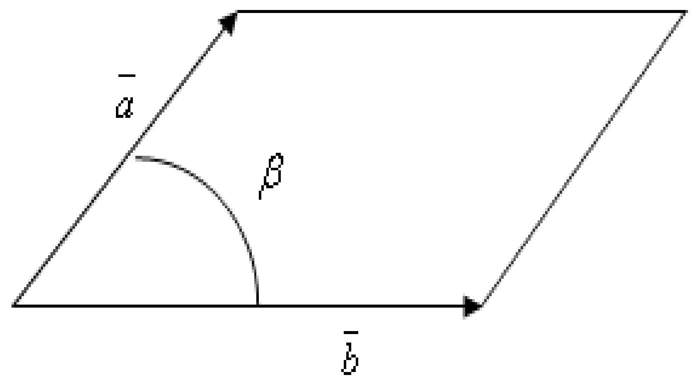
Получили одно и то же выражение, значит формула (1) верна.

Приложения.

1) Координаты векторного произведения:

$$\left(a_y b_z - b_y a_z\right) = c_x,\ -\left(a_x b_z - b_x a_z\right) = c_y,\ \left(a_x b_y - a_y b_x\right) = c_z$$

2) Площадь параллелограмма, построенного на 2-х векторах:



$$S = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\beta \rightarrow S = \left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right| \rightarrow S = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

3) Площадь треугольника, построенного на 2-х векторах:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right|$$

Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение: Смешанным произведением 3-х векторов называется число, полученное при условии, что 2 вектора умножаются векторно, а результат этого произведения умножается на третий скалярно.

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{d}\right)$$

Свойства.

1. Смешанное произведение не изменится, если изменить порядок вычисления векторного и скалярного произведения.

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right]\bar{d}\right)=\left(\bar{a},\left[\bar{b},\bar{d}\right]\right)=\bar{a}\bar{b}\bar{d}$$

Это свойство является следствием перестановочности скалярного произведения.

2. Смешанное произведение не изменится от круговой перестановки векторов.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{d} = \bar{d}\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{d}\bar{a}$$

Это свойство является следствием того, что при такой перестановке не изменится ориентация тройки векторов.

3. Смешанные произведения сменят знак, если переставить два соседних вектора.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{d} = -\bar{b}\bar{a}\bar{d}$$

Это является следствием антиперестановочности векторного произведения.

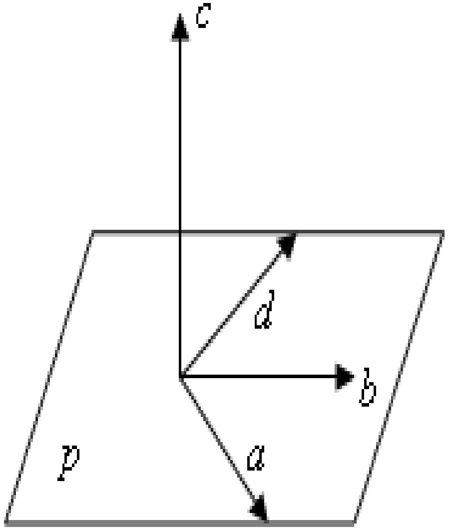
4. Смешанное произведение равно нулю, если два вектора колленеарны или все три вектора компланарны.

Доказательство:

1 случай. $\bar{a} \parallel \bar{b}$

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{d}\right) = 0, \text{т.к.} \quad c = \left[\bar{a},\bar{b}\right] = \bar{0} \to \left(\bar{c},\bar{d}\right) = \left|\bar{c}\right| \cdot \left|\bar{d}\right| \cdot \cos\alpha = 0 \cdot \left|\bar{d}\right| \cdot \cos\alpha = 0$$

2 случай. $\bar{a},\bar{b},\bar{d}$ - компланарны



$$\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\perp\bar{a},\bar{b}\rightarrow\bar{c}\perp P,\bar{d}\in P\rightarrow\bar{c}\perp\bar{d}\rightarrow\left(\bar{c},\bar{d}\right)=0\rightarrow\ \ \bar{a}\bar{b}\bar{d}=0$$

Смешанные произведения векторов в координатах и его приложения

Теорема: Смешанное произведение в координатах ортонормированного базиса определяется определителем, составленным из координат 3-х векторов.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Доказательство:

Раскрываем определитель (1) по третьей строке.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{d} = d_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - d_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + d_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Вычисляем координаты векторного произведения, используя 1 приложения векторного произведения:

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Полученный вектор умножаем скалярно на вектор

$$\overline{d}(d_x,d_y,d_z) \to (\overline{d},\overline{c}) = \overline{a}\overline{b}\overline{d} = d_x(a_y b_z - a_z b_y) - d_y(a_x b_z + b_x a_z) + d_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

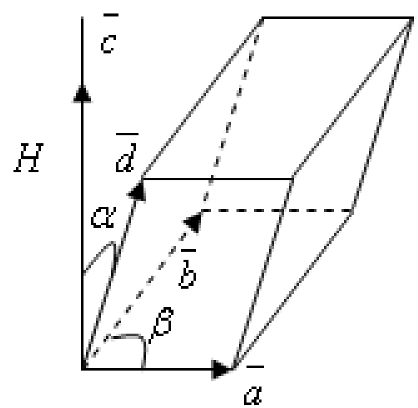
Получили одно и тоже выражение, значит формула вычисления смешенного произведения векторов верна.

Приложения.

1. Три вектора компланарны, если определитель, составленный из координат этих векторов.

Это является следствием четвёртого свойства смешанного произведения.

2. Объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах.



$$V = S_{осн} H; \quad S_{осн} = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha; \quad H = |\bar{d}|\cos\beta$$

$$V = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha|\bar{d}|\cos\beta, \quad \left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \bar{d}\right) = \left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \bar{d}\right)\cos\beta = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha|\bar{d}|\cos\beta$$

$$V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right|$$

3. Объём пирамиды. $V = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right|$