ВВЕДЕНИЕ в математический анализ 1 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Множества и действия с ними.

Понятие функции одного переменного, её свойства и способы задания.

Обратная функция, её график. Сложная функция.

Множества и действия с ними.

Определение: Множеством называется совокупность однородных элементов определённой природы.

Действия с множествами:

1. Два множества А и В называются равными, если они имеют одинаковые элементы, причём повторяющиеся элементы считаются за один.

$$A = \{1,2\};\ B = \{1,1,2,2,2\},\ A = B$$

2. Множества А называются подмножеством В, если все элементы множества А входят в состав элементов множества В.

$$A = \{1,2\};\ B = \{1,2,3,4\} \quad A \subset B$$

3. Объединением двух множеств А и В называется множество $C = A \cup B$, состоящее из элементов принадлежащих или А, или В.

$$C = A \cup B = \{1,2\}\ или\ \{1,3,2,4\}$$

4. Пересечением множеств А и В называется множество $C = A \cap B$, состоящее из элементов одновременно принадлежащих этим двум множествам.

$$A = \{1,2\};\ B = \{2,3\};\ C = A \cap B = \{2\}$$

5. Разностью двух множеств А и В называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из элементов принадлежащих множеству А, но не принадлежащих множеству В: $A = \{1,2\}$; $B = \{2,3\}$; $\rightarrow C = A \setminus B = \{1\}$; $D = B \setminus A = \{3\}$

Виды множеств:

1. Числовые множества

а) множества натуральных чисел: $N = \{1,2...\infty\}$.

б) множества целых чисел: $Z = \{-\infty,...,-1,0,1,...\infty\}$.

в) множества рациональных чисел: $Q = \left\{\frac{a}{b}, \forall a,b \in z\right\}$.

г) множества иррациональных чисел: $R = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, ...\pi, ...\right\}$.

д) множества комплексных чисел: $C = \left\{a + ib, i = \sqrt{-1}, \forall a,b \in R\right\}$

Замечание: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

2. Интервал: $(a,b) = \{x, a < x < b, \forall a,b \in R\}$

3. Отрезок: $[a,b] = \{x, a \le x \le b, \forall a,b \in R\}$

4. Окрестность: $O_\varepsilon(x_0)$-ипсилон окрестность точки x_0.

$O_\varepsilon(x_0) = \{x, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \forall x_0, \varepsilon \in R\}$

5. Множества абсолютных величин: $|x| = \begin{cases} +x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Свойства абсолютных величин:

1) $|x+y| \le |x| + |y|$ 2) $|xy| = |x||y|$ 3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Понятие функции одного переменного, её свойства и способы задания.

Определение: Отображением множества X по множеству Y или функцией называется соответствие f, при котором каждому значению $x \in X$ соответствует одно и вполне определённое значение $y \in Y$.

Определение: Множество X называется областью определения функции, множество Y называется областью значения функции.

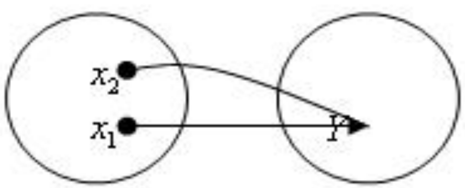
Замечание: Для функции одного переменного в качестве множеств X, Y выступает интервал или отрезок.

Свойства функций:

1. Взаимно однозначность.

Определение: Функция $f(x)$ называется взаимно однозначной, если $\forall x_1, x_2 \in X_1$, при $x_1 \neq x_2$ выполняется условие: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Иллюстрация взаимно неоднозначной функции:



$$y = x^2 \qquad \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\} y = 1$$

2. Монотонность (возрастание или убывание).

Определение: Функция $f(x)$ называется возрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, то выполняется следующее неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$.

3. Ограниченность.

Определение: Функция $f(x)$ называется ограниченной, если $\forall x \in X$, то выполняется следующее неравенство $|f(x)| < M \quad (\forall M > 0, M \in R)$.

Способы задания функций:

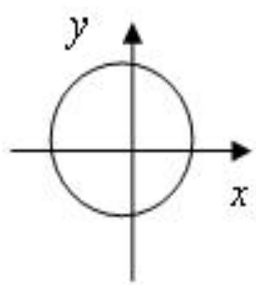
а) аналитический: *явный*: $y = f(x)$

неявный: $F(x,y) = 0$

б) табличный:

x	0	$1/2$	1
y	1	$\sqrt{3}/2$	0

в) графический.



Обратная функция, её график. Сложная функция.

Определение: Функция $f^{-1}(y)$ называется обратной по отношению к функции $f(x)$, если каждому значению $y \in Y$ соответствует одно и вполне определённое значение $x \in X$ при условии, что каждому $x \in X$ также соответствует одно и вполне определённое значение $y \in Y$.

Замечание: из определения следует, что обратная функция существует только для взаимно однозначных функций.

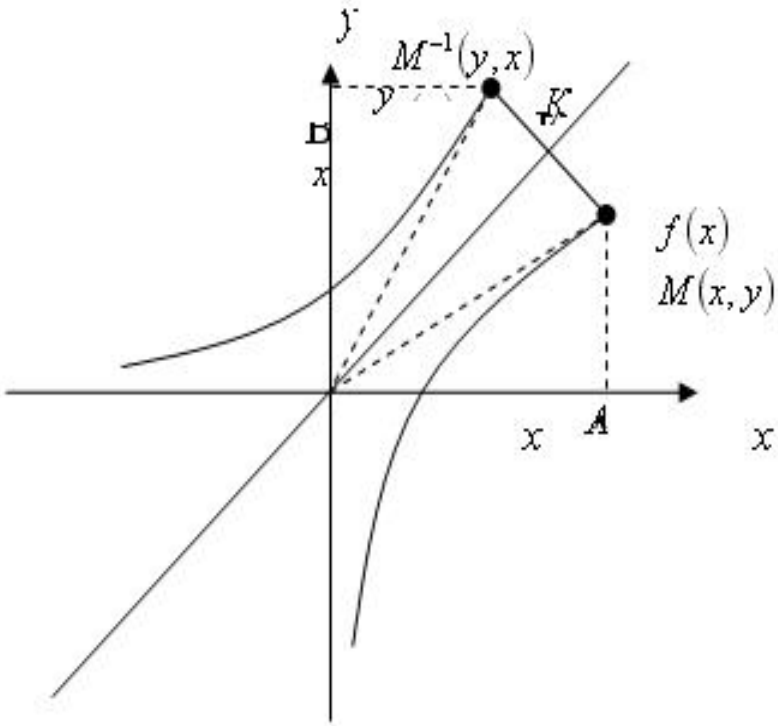
Теорема 1: Любая монотонная функция имеет обратную функцию с тем же характером монотонности.

Доказательство: Пусть $f(x)$ возрастает

$\forall x \in X \rightarrow x_1 < x_2,\ f(x_1) < f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2,\ f(x_1) \neq f(x_2)$, значит функция $f(x)$ является взаимнооднозначной. Значит согласно замечанию функция имеет обратную функцию.

Теорема 2: График обратной функции симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$.

Доказательство



$\forall M \in f(x)$. Из $\Delta OAM \to OM \to \sqrt{x^2+y^2}$; Из $\Delta OBM^{-1} \to OM^{-1} \to \sqrt{x^2+y^2}$

Рассмотрим $\Delta OKM^{-1} = \Delta OKM$ по гипотенузе и общему катету $\to KM = KM^{-1}$

Значит любая точка графика исходной функции симметрична соответствующей точке графика обратной функции, значит графики исходной и обратной функции симметричны.

Сложная функция.

Определение: Функция $y = f(g(x))$ называется сложной, если она составлена из 2-х или более функций: $y = f(z)$, $z = g(x)$.

Замечание: Области определения и значения сложной функции обычно меньше, чем области определения и значения функции её составляющей.

Замечание: $Y_1 = Z \cap Z_1$

Пример: $y = \sqrt{\sin x}$

Для каждой в отдельности функций

$\rightarrow y = f(z) = \sqrt{z}$; Область определения: $Z \in [0,\infty)$, область значений: $Y \in [0,\infty)$

$\rightarrow z = g(x) = \sin x$; Область определения: $X \in (-\infty,\infty)$, область значений: $Z_1 \in [-1,1]$

Для сложной функции

$y = f(g(x))$; Область определения: $X_1 \in [0 \pm 2\pi n, \pi \pm 2\pi n)$.

Область значений: $Y_1 = Z \cap Z_1 \rightarrow Y \in [0,1]$