ВВЕДЕНИЕ в математический анализ 2 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Предел функции в точке и на бесконечности.

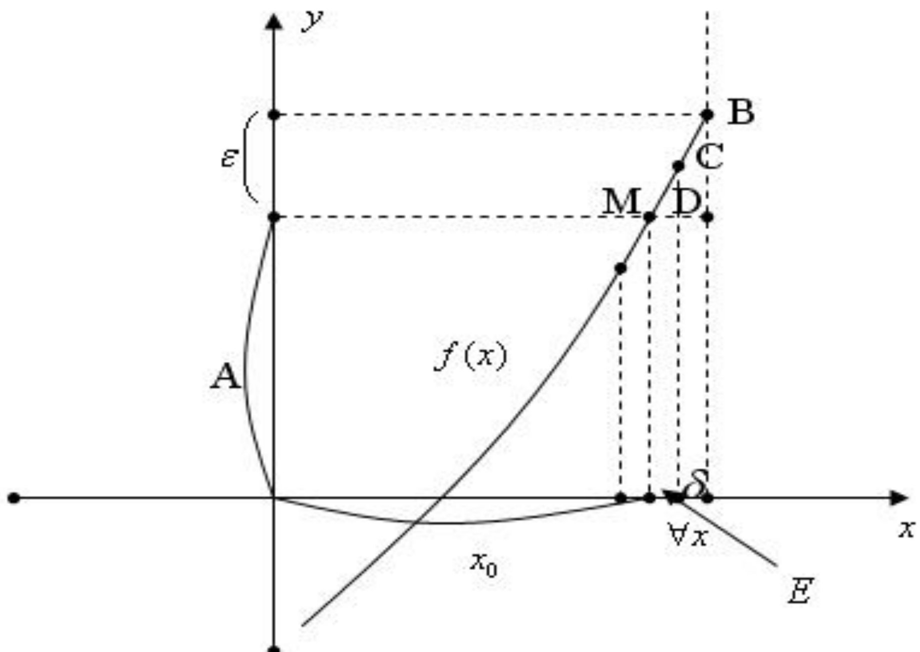
Бесконечно малые функции и их свойства.

Основные теоремы о пределах.

Два признака существования предела.

Предел функции в точке и на бесконечности.

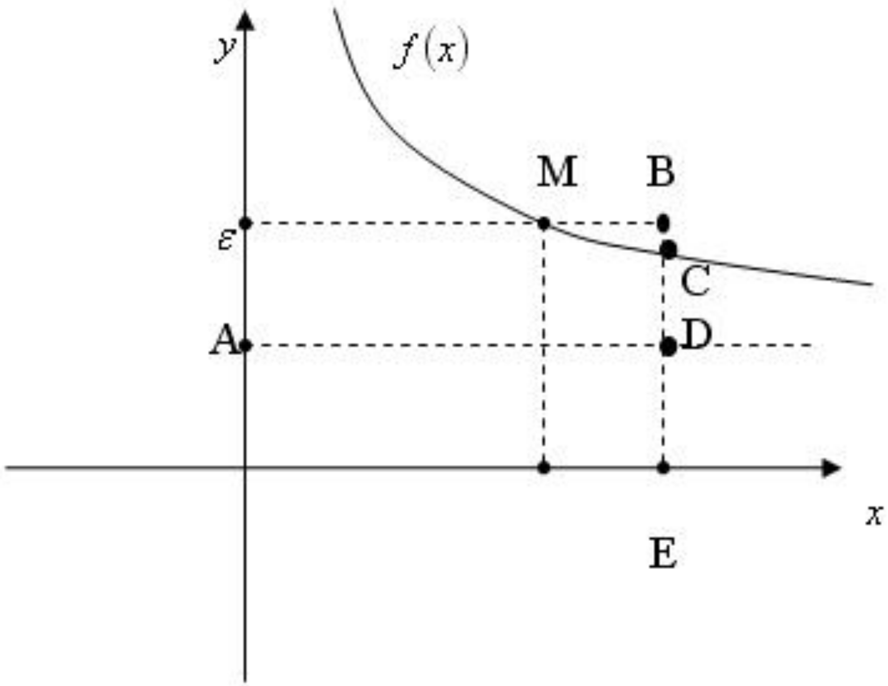
1. Определение: Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке x, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in O_{\delta}(x_0)$ выполняется следующее неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.



EC – Расстояние от графика функций до оси абсцисс, равное значению функции $f(x)$, ED = A, CD = EC - ED = $|f(x) - A|$.

Из рисунка видно, что CD < BD = $\varepsilon \to |f(x) - A| < \varepsilon$, что и следовало подтвердить.

2. Определение: Число А называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности, если $\forall \varepsilon > 0 \; z \delta(\varepsilon) > 0$, такое,.. что $\forall x > \delta$ выполняется следующее неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.



EC = $f(x)$, ED = A, CD = EC - ED = $|f(x) - A|$, CD < BD = $\varepsilon \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, что и следовало подтвердить.

Замечание: Для того, чтобы вычислить значение предела необходимо подставить x_0 в исходную функцию.

Обозначения пределов: 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

Бесконечно малые функции и их свойства.

Определение: Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если предел этой функции в этой точке равен нулю $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Из определения пределов функции в точке следует $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon \ (\forall \varepsilon) \to |\alpha(x)| < \varepsilon \quad (1)$.

Свойства б.м.

1. Если для двух функций выполняется неравенство: $|f(x)| < |\alpha(x)|$, где $\alpha(x)$ - б.м., то $f(x)$ также будет б.м.

Доказательство:

$|f(x)| < |\alpha(x)| < \varepsilon \to |f(x)| < \varepsilon \to |f(x) - 0| < \varepsilon \to$ по определению предела - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, значит по определению б.м. $f(x) -$ б.м.

2. Произведения б.м. на константу являются б.м.

Доказательство:

С – константа, $\alpha(x)$ - б.м., $f(x) = c\,\alpha(x)$. Из (1) учитывая, что ε - любое $\to |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$;

$|f(x)| = |c\,\alpha(x)| = |c||\alpha(x)| < |c|\dfrac{\varepsilon}{|c|} \to |f(x)| < \varepsilon$ значит $f(x)$ -б.м.

3. Произведение б.м. на ограниченную функцию являются б.м. функцией.

Доказательство:

$\alpha(x)$ - б.м., $\to |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$; $f_1(x)$ - ограниченная функция

$\to |f_1(x)| < M$; (М – положительное число) $\to f(x) = \alpha(x)\,f(x)$

$|f(x)| = |\alpha(x)||f_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \to |f(x)| < \varepsilon \to f(x) -$ б.м.

4. Сумма двух б.м. является б.м..

Доказательство:

$$\beta(x)-\text{б.м.}\to|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2};\ \alpha(x)-\text{б.м.}\to|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2};\ f(x)=\alpha(x)+\beta(x)$$

$$|f(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\to|f(x)|<\varepsilon,\ f(x)-\text{б.м.}.$$

5. Произведение двух б.м. также является б.м..

Доказательство:

$$\alpha(x)\ \text{- б.м.},\to|\alpha(x)|<\sqrt{\varepsilon};\ \beta(x)-\text{б.м.}\to|\beta(x)|<\sqrt{\varepsilon};\ f(x)=\alpha(x)\beta(x)$$

$$|f(x)|=|\alpha(x)||\beta(x)|<\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon\to|f(x)|<\varepsilon,\ f(x)-\text{б.м.}$$

6. Связь предела и б.м.

Для того, чтобы число А являлось пределом функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)-A$ было б.м.

Доказательство:

Необходимость: пусть предел существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. По определению предела имеем:

$$|f(x)-A|<\varepsilon\to|(f(x)-A)-0|<\varepsilon\to\lim|f(x)-A|=0\to f(x)-A-\text{б.м.}$$

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1: Если функция имеет предел, то он единственен.

Доказательство:

Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что функция в одной и той же точке имеет два предела: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$, 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2$

Используем шестое свойство б.м.: 1) $f(x) - A_1 = \alpha_1$-б.м., 2) $f(x) - A_2 = \alpha_2$-б.м

$$\to \underbrace{A_2 - A_1}_{A-const} = \underbrace{\alpha_1 - \alpha_2}_{\alpha-б.м.(по\ 4св-ву)}$$

Константа не может быть равна б.м., значит получили противоречие, значит предположение о существовании двух пределов не верно, значит предел единственен.

Теорема 2: Если функция имеет предел, то она является ограниченной функцией.

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, требуется доказать, что $|f(x)| < M$ $(\forall M > 0)$.

По шестому свойству б.м.: $f(x) - A = \alpha(x) \to f(x) = A + \alpha(x) \to$

$\to |f(x)| = |A + \alpha(x)| \le |A| + |\alpha(x)| < |A| + \varepsilon = M > 0 \to |f(x)| < M \to f(x)$ - ограниченная.

Теорема 3: Предел суммы двух функций равен сумме пределов вычисленных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$$f_1(x) \to \lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1 \quad (1),\ f_2(x) \to \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2 \quad (2),\ f(x) = f_1(x) + f_2(x) \to \lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad (3).$$

Решение: Из (1) и (2) функции вычислим f_1, f_2 по шестому свойству б.м.:

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1 \quad (4),\ f_2(x) = A_2 + \alpha_2 \quad (5);$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = A_1 + \alpha_1 + A_2 + \alpha_2 = (A_1 + A_2) + \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha - б.м.} = (A_1 + A_2) + \alpha \to A = A_1 + A_2$$

$$\lim_{x\to 0}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to 0} f_1(x) + \lim_{x\to 0} f_2(x).$$

Теорема 4: Предел произведения двух функций равен произведению пределов вычисленных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = (A_1 + \alpha_1)(A_2 + \alpha_2) = A_1 A_2 + A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = A_1 A_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = A_1 A_2 + \alpha \to$$

$$\to A = A_1 A_2 \to \lim_{x\to x_0}(f_1(x) f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

Замечание: предел константы равен самой константе.

Следствие из теоремы 4:

1. Константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} Cf_1(x)=\lim_{x\to x_0} C\lim_{x\to x_0} f_1(x)=C\lim_{x\to x_0} f_1(x)$$

2. Предел степени функции равен степени предела от этой функции при условии, что эта степень – константа.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^n=\lim_{x\to x_0}\big(\underbrace{f(x)\times\ldots\times f(x)}_{n-раз}\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\ldots\times\lim_{x\to x_0} f(x)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

Теорема 5: Предел частного двух функций равен частному пределов, вычисленных от каждой из этих функций.

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1+\alpha_1}{A_2+\alpha_2}=\frac{A_1}{A_2}+\left(\frac{A_1+\alpha_1}{A_2+\alpha_2}-\frac{A_1}{A_2}\right)=\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_1A_2+\overbrace{\alpha_1A_2}^{\gamma_2}-A_1A_2-\overbrace{A_1\alpha_2}^{\gamma_3}}{A_2{}^2+\underbrace{A_2\alpha_2}_{\gamma_1}}+\frac{\gamma_2-\gamma_3}{A^2+\gamma_1}=\gamma\frac{1}{M}+\frac{A_1}{A_2}=$$

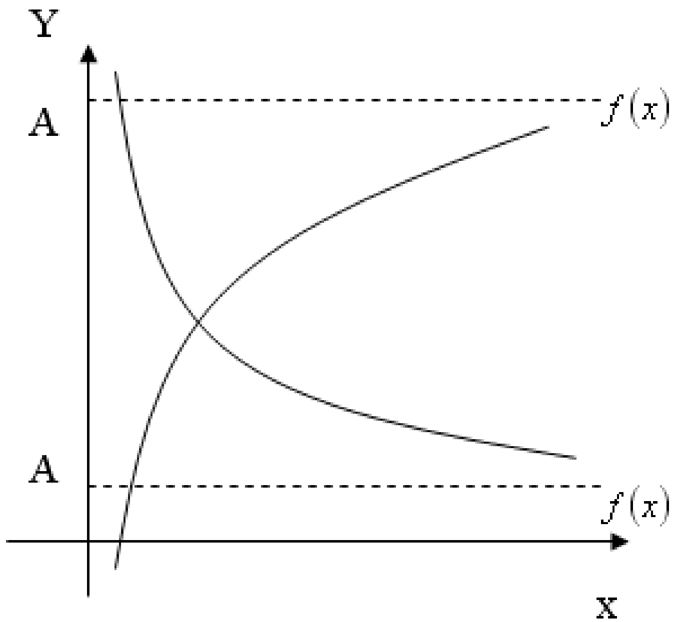
$$\frac{A_1}{A_2}+\alpha\to A=\frac{A_1}{A_2}\to\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}$$

Два признака существования предела.

1. Признак Вейерштрасса.

Если монотонная функция ограничена в направлении своей монотонности, то она имеет предел.

Замечание. Этот признак проиллюстрирован на следующем рисунке:



2. Если для трёх функций выполняется неравенство $|u(x)| < |f(x)| < |v(x)|$ и $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = A \ (1)$

$\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = A \ (2)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Доказательство:

По определению предела из формулы (1) следует:

$|u(x) - A| < \varepsilon \to -\varepsilon < u(x) - A < \varepsilon \to A - \varepsilon < u(x) < A + \varepsilon$,

аналогично из формулы (2):

$|v(x) - A| < \varepsilon \to -\varepsilon < v(x) - A < \varepsilon \to A - \varepsilon < v(x) < A + \varepsilon$

$A - \varepsilon < u(x) < f(x) < v(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \to A$ является пределом функции $f(x)$.