ПРОИЗВОДНЫЕ функции одного переменного 1 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие производной и необходимое условие её существования.

Дифференциал функции и необходимые условия дифференцирования.

Геометрический и механический смысл производной и дифференциала.

Понятие производной и необходимое условие её существования.

Определение: Производной от функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращения от момента стремится к нулю.

Обозначения производной: $y` \equiv f'(x) \equiv y'x \equiv f'_x(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Необходимый признак существования производной.

Если функция имеет производную в т. x, то она является непрерывной в этой точке.

Доказательство:

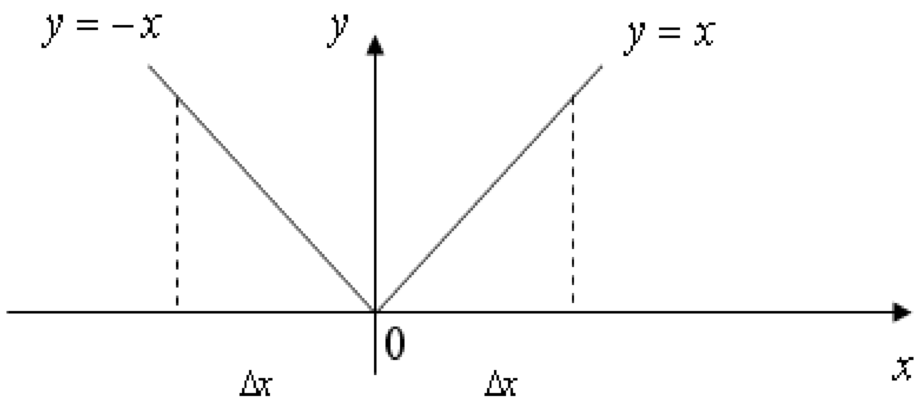
y' – существует.

$\lim \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y'(x) \cdot 0 = 0$, значит по определению функция является непрерывной.

Замечание: Производная от функции в общем случае также является функцией.
Замечание: Производная существует только для непрерывных функций.

Замечание: Обратной теоремы не существует, т.е из того, что функция непрерывная в точке не следует, что существует производная от этой функции в этой точке.

Например: функция: $y=|x|$ имеет следующий график



Вычислим производные через приращение функции справа и слева от точки x = 0

Справа: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$. Слева: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$

Получилось, что односторонние пределы не равны, значит производная в точке x = 0 не существует, хотя, как видно из рисунка, функция $y=|x|$ является непрерывной.

Дифференциал функции и необходимые условия дифференцирования.

Пусть для функции $y = f(x)$ существует производная $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Используем шестое свойство б.м.: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$ -б.м..

Найдем: $\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\gamma_1} + \underbrace{\alpha \Delta x}_{\gamma_2} \rightarrow \Delta y -$ б.м.

Сравним б.м. γ_1, γ_2 с б.м. Δx .

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\gamma_1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \rightarrow \gamma$ и Δx - одного порядка малости.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\gamma_2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \rightarrow \gamma_2 = 0(\Delta(x))$

γ_1 - б.м. более низкого порядка малости, чем γ_2, значит $\Delta y \sim \gamma_1$ согласно теореме 4 об эквивалентных бесконечно малых (б.м.) $\rightarrow$ б.м. γ_1 является главной частью приращения функции.

Определение: дифференциалом функции называется главная часть приращения этой функции.

Вычислим дифференциал функции $y = x$: $dx = x'\Delta x;\ x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x};\ \ dx = \Delta x \to \beta$.

Значит: дифференциал аргумента равен приращению этого аргумента.

Определение: Дифференциал функции равен производной от этой функции, умноженное на дифференциал аргумента этой функции: $dy = f'(x)dx$

Приращение функции через дифференциал: $\Delta y = dy + \alpha\Delta x \quad (1)$.

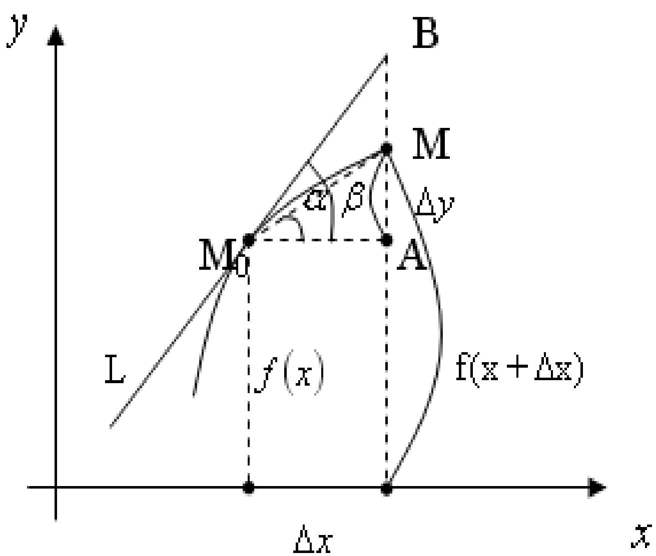
Вывод: дифференциал функции используется для приближённого вычисления приращения функции.

Условие дифференцируемости:

Функция является дифференцируемой, если для неё существует производная или дифференциал, а условие (1) – является условием дифференцируемости.

Геометрический и механический смысл производной и дифференциала.

1. Геометрический смысл (задача Лейбница о касательной).



L - касательная к графику функции $f(x)$ в т. M_0.

В пределе, при $\Delta x \to 0$; $\alpha \to \beta$; $tg\alpha \to tg\beta$

$$AM = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y; \quad tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

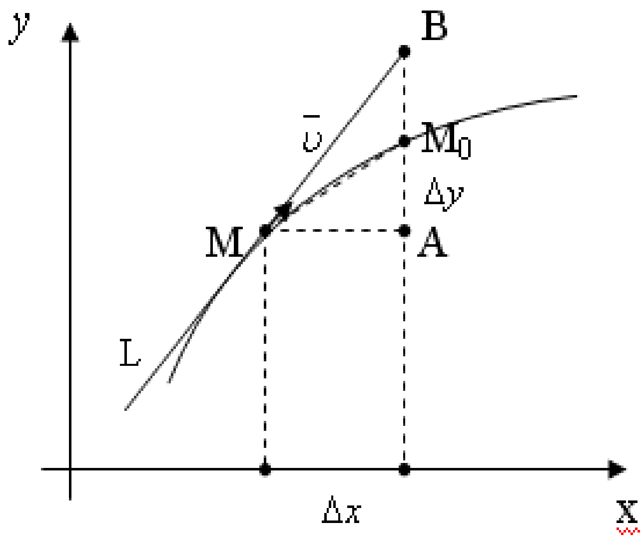
Вывод: производная в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в этой точке.

Составим уравнение касательной в следующем виде:

$$y = y_0 + k\left(x - x_0\right), \quad k = tg\beta; \quad y = y_0 + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right), \; dy = \underbrace{f'\left(x\right)\Delta x}_{f(x)}; \quad AB = tg\beta\Delta x$$

Вывод: Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведённой в данной точке.

2. Механический смысл производной и дифференциала (задача Ньютона о скорости движения математической точки).



Если точка М движется с постоянной скоростью, то она пройдёт путь по прямой MM_0 равной Δy .Средняя скорость за время Δx $\upsilon_{ср} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, мгновенная скорость движения точки $\upsilon = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \upsilon = f'(x)$.

Вывод 1: производная численно равна мгновенной скорости движения точки.

Вывод 2: вектор скорости направлен по касательной проведённой в данной точке.

Вывод 3: дифференциал функции численно равен пути, который могла бы пройти точка за время Δx , двигаясь с постоянной скоростью.