ПРОИЗВОДНЫЕ функции одного переменного 2 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Производные: константы, суммы, произведения и частные. Производная обратной и сложной функции. Свойство инвариантности дифференциала. Производные параметрических и неявных функций.

Производные основных 13 элементарных функций.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Производные: константы, суммы, произведения и частные.

Теорема 1: Производная от константы равна нулю.

Доказательство:

$$y = f(x) = c - const \rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Теорема 2: Производная от суммы двух функций равна сумме производных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$$y = f(x) = u(x) + v(x); \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

$$\rightarrow (u + v)' = u' + v'$$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \quad (1)$$

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v \quad (2)$$

Теорема 3: Производная произведения вычисляется по следующей формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Доказательство:

$$y = f(x) = u(x)v(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{0} = uv' + vu'$$

Следствие из теоремы 3: постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(cv)' \overset{T3}{=} \overset{(T1)}{c'}\, v + cv' = 0 + cv' = cv'$$

Теорема 4: Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство:

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u v - uv - u\Delta v}{\Delta x\left(v^2 + v\Delta v\right)} +$$

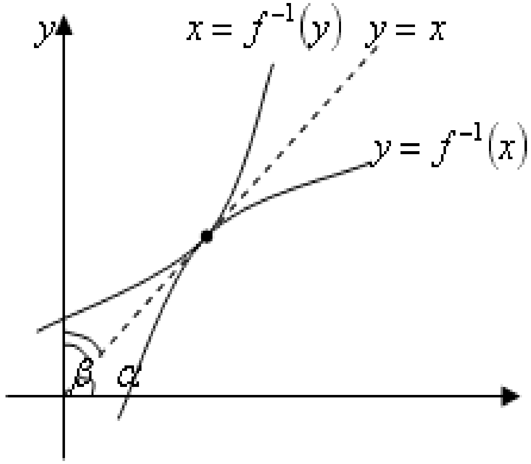
$$+ \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v^2 + \underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v\Delta v}_{=0,}} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

.

Предел в знаменателе равен нулю, по второму определению непрерывности.

Производная обратной и сложной функции.

1. Производная обратной функции.



$$tg\alpha = y'_x \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad tg\beta = x'_y$$

$$x'_y = tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{y'_x}; \qquad x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

2. Производная сложной функции: $y = f\left(g\left(x\right)\right)$

Представим сложную функцию как две в отдельности простые функции:

$$1)\ y = f\left(z\right) \qquad\qquad 2)\ z = g\left(x\right)$$

Для каждой из этих двух функций, вычислим приращение этих функций, используя условие дифференцируемости этих функций:

$$\left.\begin{aligned}\Delta y &= f'\left(z\right)\Delta z + \gamma_1 \Delta z\\ \Delta z &= g'\left(x\right)\Delta x + \gamma_2 \Delta x\end{aligned}\right\} \rightarrow f'\left(x\right)g'\left(x\right)\Delta x + f'\left(z\right)\gamma_2 \Delta x - \gamma_1 g'\left(x\right)\Delta x + \gamma_1\gamma_2\Delta x$$

Вычислим производную:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f'\left(z\right)g'\left(x\right) + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} y'\left(z\right)\gamma_2}_{=0\left(\text{т.к. }\gamma_2 - \text{б.м.}\right)} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} g'\left(x\right)\gamma_1}_{=0\left(\text{т.к. }\gamma_1\ \text{б.м.}\right)} + \overbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1\gamma_2}^{=0} = f'\left(z\right)g'\left(x\right)$$

$$\rightarrow \left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(z\right)g'\left(x\right)$$

Вывод: Производная сложной функции равна произведению производных, входящих в сложную функцию, вычисленных каждая по своему аргументу.

Свойство инвариантности дифференциала. Производные параметрических и неявных функций.

1. Свойство инвариантности (неизменности) дифференциала.

Теорема 1: Выражение дифференциала не изменится, если вместо аргумента функции подставить функцию другого аргумента.

Доказательство: $dy = f'(x)dx$ пусть $x = x(t)$, t - аргумент $\to dy = f'(x(t))dt = f'(x)\underbrace{x'(t)dt}_{dx} =$

$= f'(x)dx$

2. Производная параметрической функции.

$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$ параметрический способ задания функции.

Для функции $x(t)$ составим обратную функцию $t = t(x) \to y = y(t(x)) \to$

$t = t(x) \to y = y(t(x)) \to y' = y'(t)t(x) = y'(t)\dfrac{1}{x'(t)}$ $\qquad \Big| \to y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

3. Производная неявной функции.

Правило: Производная неявной функции $F(x,y)=0$ вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции, считая y - функцией от x.

Замечание: При дифференцировании у в уравнении $F(x,y)=0$ ставится y'.

Например:

$$x^2+y^2=1 \to 2x+2yy'=0 \to y'=-\frac{x}{y}$$

Производные основных 13 элементарных функций.

1. $y = a^x$

$$\Delta y = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right) \to y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Замена: $z = a^{\Delta x} - 1 \to a^{\Delta x} = 1 + z \to \ln a^{\Delta x} = \ln\left(1 + z\right) \to \Delta x \ln a = \ln\left(1 + z\right) \to \Delta x = \dfrac{\ln\left(1 + z\right)}{\ln a}$

$$\to y' = a^x \lim_{z \to 0} \frac{z \ln a}{\ln\left(1 + z\right)} = a^x \ln a \frac{1}{\underbrace{\lim_{z \to 0} \frac{\ln\left(1 + z\right)}{z}}_{=1,\text{ как 2 замечательный предел}}} = a^x \ln a \qquad \to \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

2. $y = e^x$

$$y' = e^x \ln e = e^x \qquad \to \left(e^x\right)' = e^x$$

3. $y = \log_a x$

$x = a^y$ - обратная функция $\rightarrow x' = \dfrac{1}{y'}$ $\rightarrow y' = \dfrac{1}{x'}$

$x' = a^y \ln a = x \ln a;$ $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\rightarrow (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

4. $y = \ln x$

$y' = \dfrac{1}{x \ln e} = \dfrac{1}{x}$ $\rightarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5. $y = x^n$

$y = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ - сложная функция $\rightarrow y' = e^{n \ln x} n \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^n n}{x} = nx^{n-1} \rightarrow \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

6. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Используем формулу тригонометрии: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right).$

$$\rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \rightarrow (\sin x)' = \cos x$$

7. $y = \cos x$

Используем формулы приведения: $y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x$

$\to (\cos x)' = -\sin x$

8. $y = tgx$

Используем формулу производной частного: $y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = ctgx$

Аналогично: $\to (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y = \arcsin x$

Составим обратную функцию: $x = \sin y$. Вычислим производную обратной функции:

$\to x' = \cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \to y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad \to (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $y = \arccos x$

Аналогично: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = arctgx$

Составим обратную функцию: $x = tgy$. Вычислим производную обратной функции:

$$x' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = tg^2 y + 1 = 1 + x^2 \to y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+x^2} \quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

13. $y = arcctgx$

Аналогично: $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение: Производной n-го порядка называется производная, вычисленная от производной $n-1$-го порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \to y'' = (y')'$$

Производная n-го порядка для функции e^x и $\ln x$.

1. $y = e^x \to y^{(n)} = e^x$

2. $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x};\quad y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2};\quad y''' = \frac{2}{x^3} = \frac{2!}{x^3};\quad y^{IV} = -\frac{6}{x^4} = -\frac{3!}{x^4} \quad \to y^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n}$$

Определение: Факториал числа n называются производные чисел натурального ряда от единицы до n, т.е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$

Замечание: $0! = 1$

Определение: Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал, вычисленный от дифференциала $n-1$-го порядка.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) \to d^2 y = d\left(dy\right)$$

$$dy = f'(x)dx \to d^2 y = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

Замечание: Полученная формула справедлива только для простых функций.

Производная второго порядка неявной функции

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} \to y'' = \frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t}$$