ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ
3 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Признаки монотонности функции

Экстремум функции и необходимый признак его существования. Достаточные признаки экстремума по 1, 2 и n - ой производных.

Понятие выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Необходимый и достаточный признак выпуклости, вогнутости. Точка перегиба: необходимый и достаточный признаки . Асимптоты графика функции.

Признаки монотонности функции

Теорема: Для того чтобы функция $f(x)$, дифференцируемая на $[a,b]$ возрастала (убывала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ x\in [a,b]$ выполнялось неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Доказательство :

Необходимость : пусть $f(x)$ возрастет на $[a,b]\rightarrow$ при $x_1 < x_2$ ($\forall\ x_1,x_2\in [a,b]$) $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ $\rightarrow f'(x) = \lim \Delta y / \Delta x > 0$, ч.т.д.

Достаточность : пусть $\forall\ x\in [a,b]$ $f'(x) > 0$. Выберем $x_1,x_2\in [a,b]$ и на $[x_1,x_2]$ применим теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\times(x_2 - x_1)$ ($\forall\ x\in[x_1,x_2]$). По условию $f'(x) > 0$, $x_1 < x_2$ $\rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f(x)$ возрастет, ч.т.д.

Экстремум функции и необходимый признак его существования

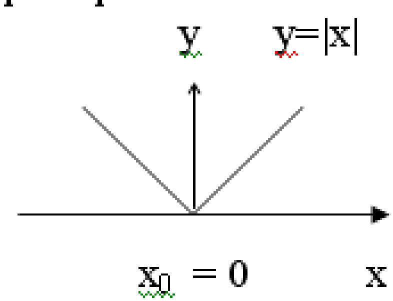
Определение: Точка x_0 называется критической, если производная в этой точке равна нулю или бесконечности, или не существует.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$ и x_0 – точка экстремума, то x_0 – критическая точка.

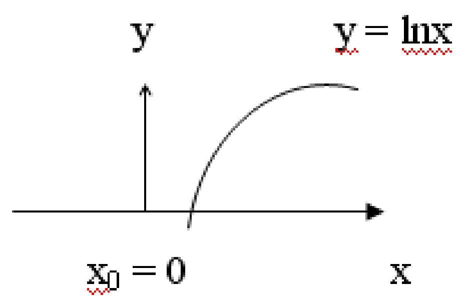
Доказательство:

Пусть $f(x)$ дифференцируема $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$ $\to$ по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.
Пусть $f(x)$ не дифференцируема в т. x_0, но непрерывна $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$ $\to$ $f'(x_0) = \infty$ или не существует $\to$ x_0 – критическая точка, ч.т.д.

Например:



$f'(x_0)$ – не существует



$f'(x_0) = 1/x_0 = \infty$

Замечание: необходимый признак не является достаточным.

Например : $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \rightarrow x_0 = 0$ из условия $f'(x_0) = 0$, но кубическая парабола $f(x) = x^3$ не имеет экстремума.

Достаточный признак экстремума по 1 производной

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна в критической т. x_0, дифференцируема $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f'(x)$ меняет знак в $O_\varepsilon(x_0)$, то при прохождении т. x_0 слева направо $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус для максимума и с минуса на плюс для минимума.

Доказательство :

Пусть $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус.

Выберем $x_1, x_2 \in O_\varepsilon(x_0)$ $(x_1 < x_0 < x_2)$ и на $[x_1, x_0]$, $[x_0, x_2]$ применим теорему Лагранжа:

на $[x_1, x_0]$: $f(x_0) - f(x_1) = f'(x) \times (x_0 - x_1)$. По условию $f'(x) > 0 \rightarrow f(x_0) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_1) < f(x_0)$,

на $[x_0, x_2]$: $f(x_2) - f(x_0) = f'(x) \times (x_2 - x_0)$. По условию $f'(x) < 0 \rightarrow f(x_2) - f(x_0) < 0 \rightarrow f(x_2) < f(x_0)$.

$\rightarrow f(x_0) > f(x)\ \forall\, x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow$ в т. x_0 функция $f(x)$ достигает своего максимума, ч.т.д.

Достаточный признак экстремума по 2 производной

Теорема: Если функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f''(x_0) = 0$, то $f''(x_0) < 0$ для максимума и $f''(x_0) > 0$ для минимума.

Доказательство:

Пусть $f''(x_0) < 0$. Разложим функцию f(x) в $O_\varepsilon(x_0)$ по формуле Тейлора с точностью до 2-ой производной: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0) + f''(x_0)\ )\times(x - x_0)^2\ /2$.

По условию теоремы $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \rightarrow f(x) < f(x_0)\ \forall\ x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow$ в т. x_0 функция f(x) достигает своего максимума, ч.т.д.

Замечание: Достаточный признак экстремума по 2 производной не применим, если $f'(x_0) = \infty$ или не существует.

Достаточный признак экстремума по n - ой производной.

Теорема: Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, …. , $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то в т. x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума при n – нечетном, а при n – четном $f^{(n)}(x_0) < 0$ для максимума и $f^{(n)}(x_0) > 0$ для минимума.

Например: $f(x) = x^5 - 4$

$f'(x) = 5x^4 \rightarrow x_0 = 0$ из условия $f'(x_0) = 0$.

$f''(x) = 20x^3$, $f''(x_0) = 0$; $f'''(x) = 60x^2$, $f'''(x_0) = 0$; $f''''(x) = 120x$, $f''''(x_0) = 0$;

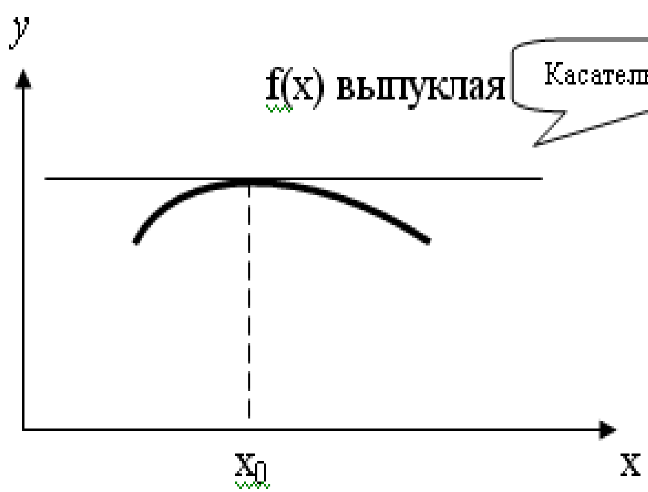
$f'''''(x) = 120$, $f'''''(x_0) \neq 0$, степень 5 - нечетная $\rightarrow f(x)$ не имеет экстремума.

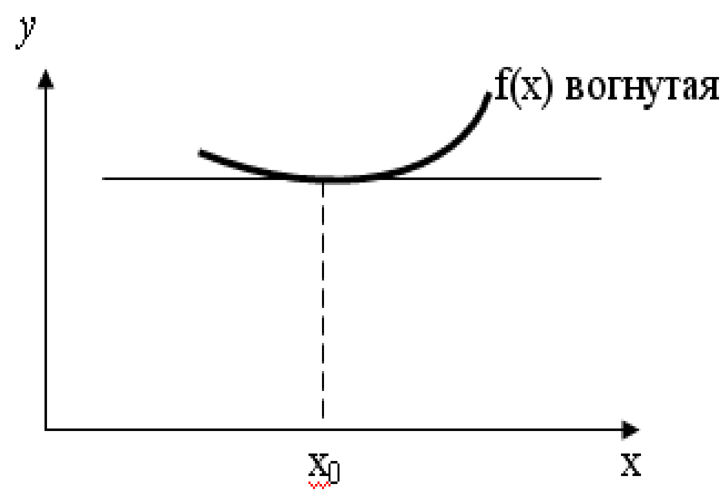
Понятие выпуклости, вогнутости и точки перегиба

Определение: Функция f(x) называется выпуклой (вогнутой) в $O_\delta(x_0)$, если $\forall\ x \in O_\delta(x_0)$ график функции f(x) лежит ниже (выше)
касательной, проведенной к графику функции в т. x_0.

Определение: Функция f(x) называется выпуклой (вогнутой) на [a,b], если она выпуклая (вогнутая) $\forall\ x \in [a,b]$.

Определение : Точка x_0, отделяющая интервалы выпуклости и вогнутости, называется точкой перегиба.

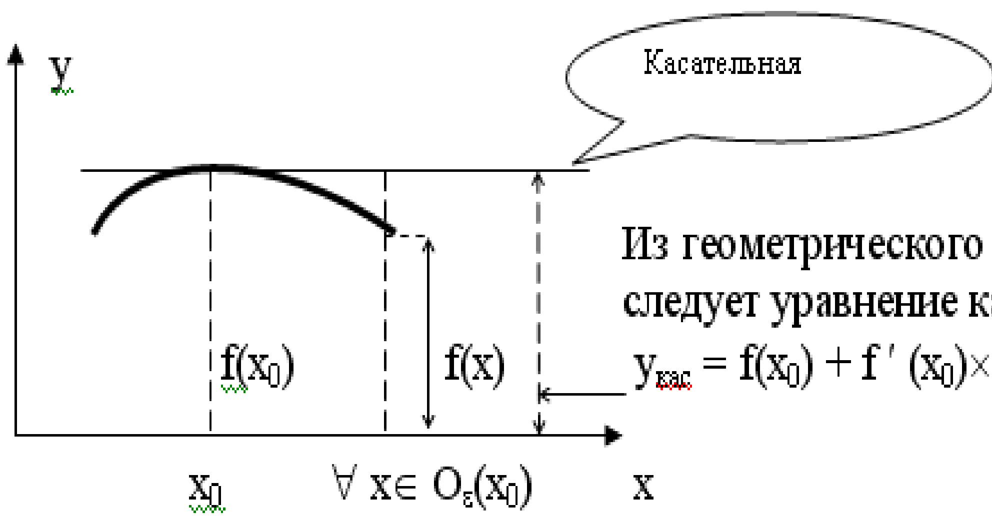




Необходимый и достаточный признак выпуклости, вогнутости

Теорема: Для того чтобы функция f(x), дважды непрерывно дифференцируема $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$, была выпуклой (вогнутой) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$ $\forall\, x \in O_\varepsilon(x_0)$.

Доказательство :



Из геометрического смысла производной следует уравнение касательной к графику

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0). \qquad (1)$$

Разложим функцию $f(x)$ в $O_\varepsilon(x_0)$ по формуле Тейлора с точностью до второй производной : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0) + f''(x_0)\times(x - x_0)^2/2$. (2)

Вычислим разность (1) – (2) : $y_{кас} - f(x) = - f''(x_0)\times(x - x_0)^2/2$. (3)

Необходимость : пусть $f(x)$ выпуклая $\to y_{кас} > f(x)$ (смотри рисунок) $\to y_{кас} - f(x) > 0 \to$ $- f''(x_0) > 0 \to f''(x_0) < 0$, ч.т.д

Достаточность : пусть $\forall\, x\in O_\varepsilon(x_0)$ $f''(x_0) < 0 \to - f''(x_0) > 0$ в формуле (3)$\to y_{кас} - f(x) > 0 \to$ $y_{кас} > f(x) \to f(x)$ выпуклая, ч.т.д.

Точка перегиба: необходимый и достаточный признаки

Теорема: Точка перегиба: необходимый признак.

Если функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0)$ равна нулю или бесконечности, или не существует.

Доказательство:

Если x_0 – точка перегиба, то по определению интервал выпуклости сменяется интервалом вогнутости $\rightarrow$ при $x < x_0$ f(x) выпуклая $\rightarrow f''(x) < 0$, а при $x > x_0$ f(x) вогнутая $\rightarrow f''(x) > 0$. Решая систему неравенств : $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$
$\rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ или бесконечности, или не существует, ч.т.д.

Теорема: Точка перегиба: достаточный признак.

Если функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и
$f''(x_0) = 0$ или бесконечности, или не существует, и $f''(x)$ меняет знак в $O_\varepsilon(x_0)$,
то x_0 – точка перегиба.

Доказательство:

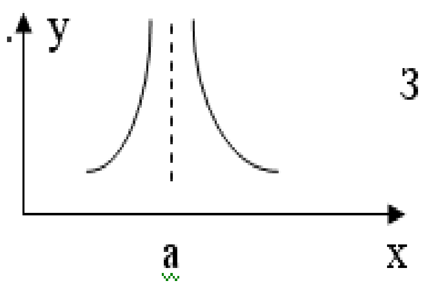
при $x < x_0$ $f''(x) < 0 \rightarrow$ f(x) выпуклая, при $x > x_0$ $f''(x) > 0 \rightarrow$ f(x) вогнутая$\rightarrow$ интервал выпуклости сменяется интервалом вогнутости $\rightarrow$ по определению x_0 – точка перегиба, ч.т.д.

Асимптоты графика функции

Определение: Прямая L называется асимптотой графика функции f(x), если расстояние от т. M ∈ f(x) до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении т. M от начала координат.

Теорема: Вертикальная асимптота

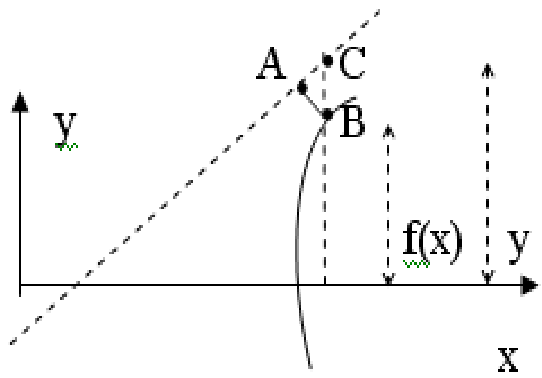
Для того, чтобы прямая x = a являлась вертикальной асимптотой графика функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



Замечание: вертикальные асимптоты соответствуют точкам разрыва 2 рода.

Теорема: Наклонная асимптота

Прямая $y = k x + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, если
$k = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) / x)$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k x)$.



$y = k x + b$

Доказательство:

$AB = BC \cos \varphi$, $\varphi \angle ABC$, $\varphi \neq \pi / 2$, т.к. $y = k x + b$ наклонная асимптота, а не вертикальная асимптота.

$AB = \lim\limits_{x\to\infty} AB = \lim\limits_{x\to\infty} BC \cos \varphi = \cos \varphi \lim\limits_{x\to\infty} BC =$

$= \cos \varphi \lim\limits_{x\to\infty} (y - f(x)) = \cos \varphi \lim\limits_{x\to\infty} (k x + b - f(x)) = 0.$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (k x + b - f(x)) = 0. \rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x \lim\limits_{x\to\infty} (k + b / x - f(x) / x) = 0.$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} k + \lim\limits_{x\to\infty} (b / x) - \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) / x)) = 0.$ $\rightarrow k = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) / x)$, ч.т.д.

$y = kx + b \to b = y - kx \to$ при $x \to \infty$ $\; y \to f(x) \to b = \lim\limits_{x \to \infty} b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - kx) \to$

$\to b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$, ч.т.д.

Замечания:
1. Если k или $b = \infty$ или не существуют, то наклонной асимптоты нет.
2. Если пределы существуют только при $x \to +\infty$, то асимптота называется правосторонней.
3. Если пределы существуют только при $x \to -\infty$, то асимптота называется левосторонней.
4. Если $k = 0$. $b \neq \infty$, то асимптота называется горизонтальной.