Несобственные интегралы

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

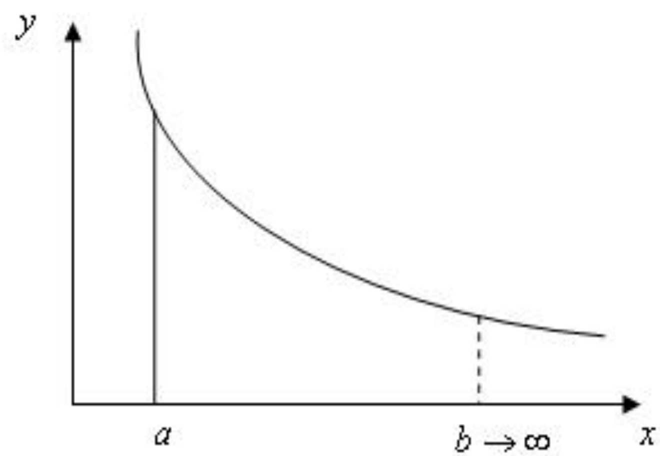
Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования и теоремы сравнения для него.

Несобственный интеграл от разрывной функции и теоремы сравнения для него.

Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования и теоремы сравнения для него.

Определение: Несобственный интеграл называется сходящимся, если результат его конечное число и расходящимся, если результат его бесконечен.

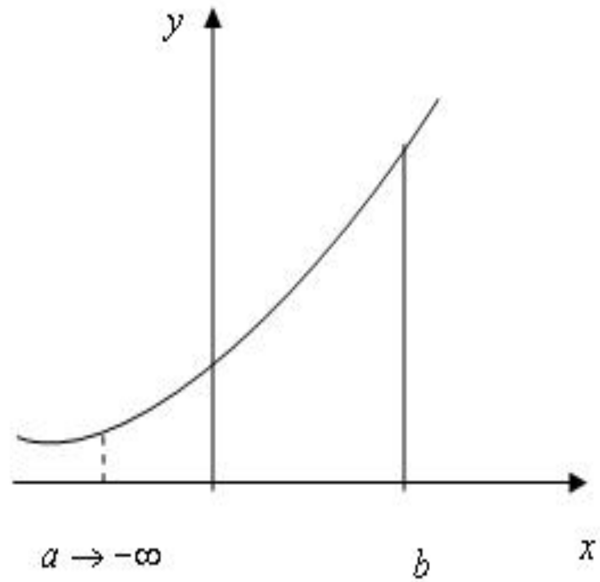
1 случай: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx$



Пример 1 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}dx = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = -(0-1) = 1$$

2 случай: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to -\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$



3 случай: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to -\infty}\int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \lim\limits_{b\to \infty}\int\limits_{0}^{b} f(x)dx$

Теоремы сравнения.

Теорема 1: $\forall x \geq a$ для двух непрерывных функций выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, и несобственный интеграл $I_2 = \int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ - сходится, то сходится интеграл $I_1 = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, при чём $I_1 \leq I_2$

Пример 2 $I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(2+e^{3x}\right)}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(2+e^{3x}\right)} < \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Из примера 1 сходится $I_2 = 1 \rightarrow$ по теореме 1 $I_1 \leq 1$ - сходится.

Теорема 2: Если $\forall \geq a$ для двух непрерывных функций выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и I_2 - расходится, то расходится интеграл I_1

Пример 3: $I_1 = \int\limits_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \varphi(x); \quad I_2 = \int\limits_1^{\infty} \sqrt{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_1^{\infty} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \lim_{b \to \infty} x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^b = \frac{2}{3} \lim_{b \to \infty} \left(b^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \infty$$

$\Rightarrow$ теореме 2 $I_1 = \infty$ - расходится.

Теорема 3: Если $\forall x \geq a$ сходится интеграл от модуля функции, то сходится интеграл I_1

Пример 4: $I_1 = \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

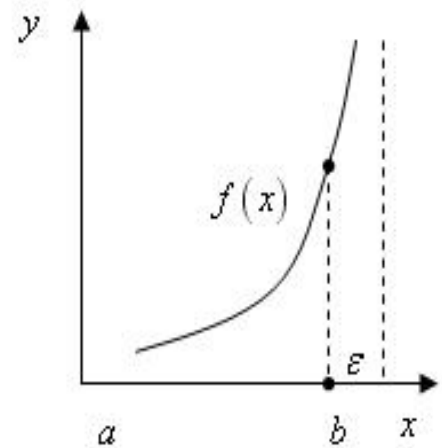
$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \rightarrow |f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x) \quad \rightarrow I_2 = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 -$ сходится. $\rightarrow$по теореме 1

сходится I $\rightarrow$по теореме 3 сходится I_1

Несобственный интеграл от разрывной функции и теоремы сравнения для него.

Дано: Функция $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a,b]$ имеет точку c - т. разрыва 2 рода.

1 случай: $c = b$

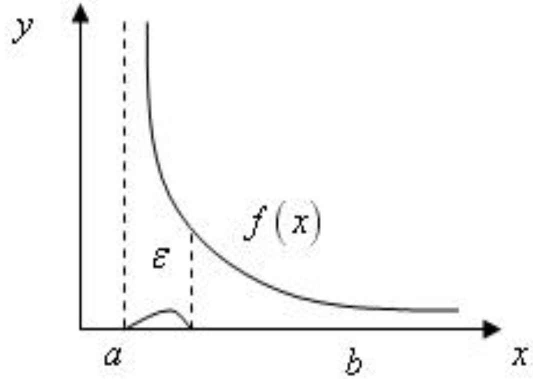


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Пример 1 : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

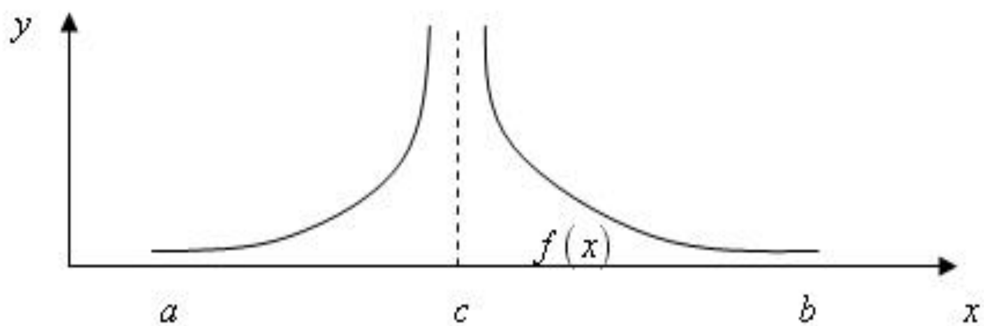
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\lim_{\varepsilon \to \infty} \sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) = 2$$ - сходится.

2 случай $c = a$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

3 случай: $c \in (a, b)$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Пример 2: $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}x^{-2}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1}x^{-2}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0}^{1-\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\left(-\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}_{-\infty}+\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{-\infty}\right)=\infty-\text{расходится.}$$

Теоремы сравнения.

Теорема 1: Если a для двух функций является точкой разрыва и для этих функций выполняется неравенство $0\le f(x)\le\varphi(x)$, и несобственный интеграл $I_2=\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ - сходится, то сходится интеграл $I_1=\int\limits_a^b f(x)dx$, при чём $I_1\le I_2$

Пример 3: $I_1=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$

$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}<\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, т.к. $x^2<1,\forall x\in[0,1]\to$

из примера 1 $I_2=2\to$ по теореме 1 $I_1\le 2$ - сходится.

Теорема 2: Если a для двух функций является точкой разрыва и для этих функций выполняется неравенство $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и I_2-расходится, то расходится интеграл I_1

Пример 4 : $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx$

$f(x) = \frac{1}{x^2-1} > \varphi(x) = \frac{1}{x^2} \to$ из примера 2 $I_2 = \infty \to$ по теореме 2 $I_1 = \infty$ - расходится.

Теорема 3: Если a является точкой разрыва сходится интеграл от модуля функции, то сходится интеграл I_1

Пример 5: $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin 10x}{\sqrt{1-x}}dx$

$I = \int_0^1 \frac{|\sin 10x|}{\sqrt{1-x}}dx \to |f(x)| = \frac{|\sin 10x|}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \varphi(x) \quad \to I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2 -$ из примера 1

сходится $\to$ по теореме 1 сходится I $\to$ по теореме 3 сходится I_1