

# Комплексные числа и действия с ними



Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:  
[Fedorovkniga.jimdo.com](http://Fedorovkniga.jimdo.com)

Комплексные числа: виды, свойства,  
изображение и формы записи.

Алгебраические действия с комплексными  
числами



# Комплексные числа: виды, свойства, изображение и формы записи.

Определение: Комплексным числом называется выражение:  $z = a + ib$  (1)  
(основная форма записи комплексного числа), где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  
 $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ).

## Виды комплексных чисел

1. Мнимое число:  $z = ib$ ;
2. Сопряженное число:  $\bar{z} = a - ib$ ;

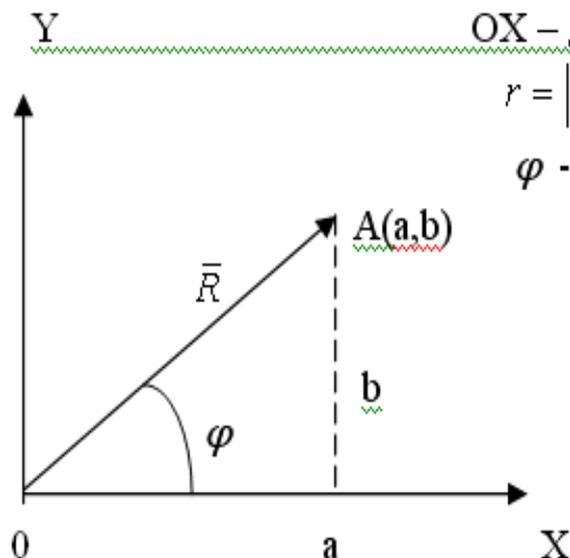
## Свойства комплексных чисел

1. Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части:  $z_1 = z_2$ , если  $a_1 = a_2; b_1 = b_2$ ;
2. Комплексное число равно нулю, если одновременно равны нулю его действительная и мнимая части:  $z = 0$ , если  $a = b = 0$ .



## Изображение комплексных чисел

Комплексное число изображается в комплексной области  $XOY$  в виде т.  $A(a,b)$  или вектора  $\bar{R}(a,b)$



$OX$  – действительная ось,  $OY$  – мнимая ось.

$r = |\bar{R}|$  - модуль комплексного числа,

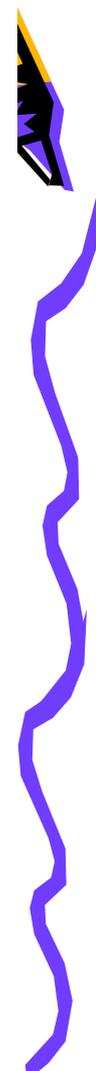
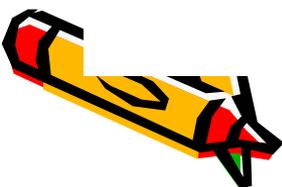
$\varphi$  - аргумент комплексного числа.

Из прямоугольного треугольника с гипотенузой  $r$  и углом  $\varphi$  выразим  $a, b$ :

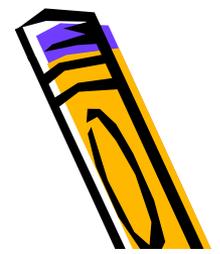
$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$ , (2). Подставим (2) в (1)

$\rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  - тригонометрическая форма записи комплексного числа

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



# Алгебраические действия с комплексными числами



$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2; \quad (3)$$

1. Сложение (алгебраическая сумма)

$$z_1 \pm z_2 = a_1 + ib_1 \pm a_2 + ib_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$$

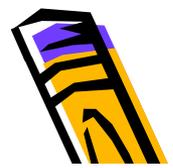
Комплексные числа изображаются, как вектора, значит

Вывод: Сложение комплексных чисел осуществляется также как сложение векторов.

2. Умножение комплексных чисел в основной форме

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + a_2 i b_1 + \underset{=-1}{i^2} b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1); \quad (4)$$





### 3. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Из предыдущего вопроса известны формулы (2), из которых следует

$$a_1 = r_1 \cos \varphi_1; b_1 = r_1 \sin \varphi_1; a_2 = r_2 \cos \varphi_2; b_2 = r_2 \sin \varphi_2; \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \rightarrow$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \quad (6) \rightarrow$$

Вывод: Модуль произведения комплексных чисел в тригонометрической форме равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов.

### 4. Возведение в степень, формула Муавра

Для вычисления результата возведения в степень используем формулу (6):

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-раз}} = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n\text{-раз}} [\underbrace{\cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)}_{n\text{-раз}} + i \underbrace{\sin(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)}_{n\text{-раз}}] \rightarrow$$

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$





5. Деление комплексных чисел в основной форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad (7)$$

где комплексное число  $z$  – результат деления в основной форме имеет вид:  $z = x + iy$ ; (8).

Здесь  $x, y$  – неизвестные действительная и мнимая части.

Выразим из (7) числитель:  $z_1 = zz_2$  (9). Подставим (3) и (8) в (9):

$$a_1 + ib_1 = (x + iy)(a_2 + ib_2) \rightarrow a_1 + ib_1 = (xa_2 - yb_2) + i(xb_2 + a_2y); \quad (10)$$

Левая и правая части (10) представляют собой комплексные числа, которые равны (по 1 свойству), если равны их действительные и мнимые части:

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = xa_2 - yb_2 \\ b_1 = xb_2 + a_2y \end{cases} \quad \text{Решаем полученную систему по методу Крамера:}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2; D_x = \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2; D_y = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = b_1a_2 - a_1b_2;$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \quad (11). \text{ Подставляем (11) в (8):}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}; \quad (12)$$





## 6. Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Подставляем (5) в (12):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]}{r_2 [\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2]} \rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \rightarrow$$

Вывод: Модуль частного комплексных чисел в тригонометрической форме равен частному модулей, аргумент произведения равен разности аргументов.

## 7. Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right];$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





Пример.  $z_1 = 1 + i$ ;  $z_2 = \sqrt{3} + i$ .

Сложение:  $z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{3}) + 2i$

Тригонометрическая форма записи:  $r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ;  $r_2 = \sqrt{3+1} = 2$ ;

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}; \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Умножение в тригонометрической форме:  $z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right)$ ;

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись:  $z_1 z_2 = 0,73 + 2,73i$ .





Деление в тригонометрической форме:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right);$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right).$$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись:  $\frac{z_1}{z_2} = 0,68 + 0,18i.$

Возведение в степень:  $(z_1)^2 = (\sqrt{2})^2 \left( \cos\left(2 \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(2 \frac{\pi}{4}\right) \right); (z_1)^2 = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись:  $(z_1)^2 = 2i$

Извлечение корня:  $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left( \cos\left(\frac{1}{4} \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{1}{4} \frac{\pi}{4}\right) \right); \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right).$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись:  $\sqrt[4]{z_1} = -0,21 + 1,07i.$

