ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

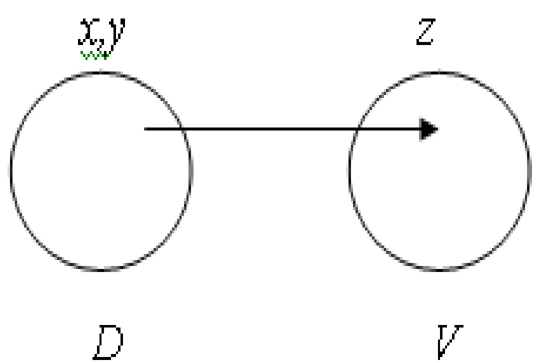
Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Функция двух переменных, область определения, способы задания и геометрический смысл.

Определение: $z = f(x, y)$ называется функцией двух переменных x, y, если каждой паре значений $x, y \in D$ соответствует одно вполне определённое значение $z \in V$

D – область определения функций, $D \in R^2$ (двумерное пространство)



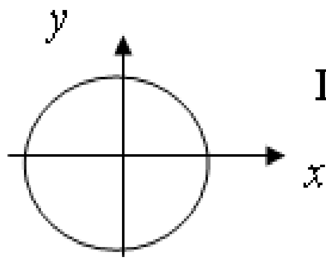
V - область значения функций, $V \in R^3$ (трёхмерное пространство).

Область определения

Определение: Если точка лежит на границе области, точка называется граничной, если внутри – внутренней.

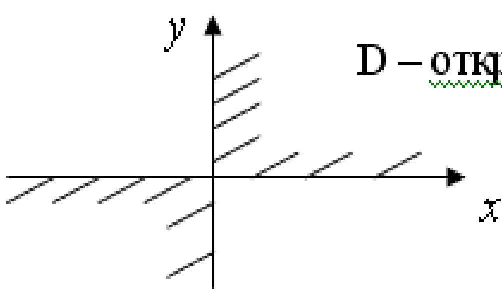
Определение: Область определения, состоящая только из внутренних точек, называется открытой, из внутренних и граничных точек – замкнутой.

Пример 1 $x^2+y^2+z^2=1 \to z=\sqrt{1-x^2-y^2} \to 1-x^2-y^2 0 \ge 0 \to x^2+y^2 \le 1$ - круг



D - замкнутая область

Пример 2 $z = Ln\frac{y}{x} \to \frac{y}{x} > 0 \to 1)\begin{cases} y>0 \\ x>0 \end{cases} \to 2)\begin{cases} y<0 \\ x<0 \end{cases}$



D – открытая область.

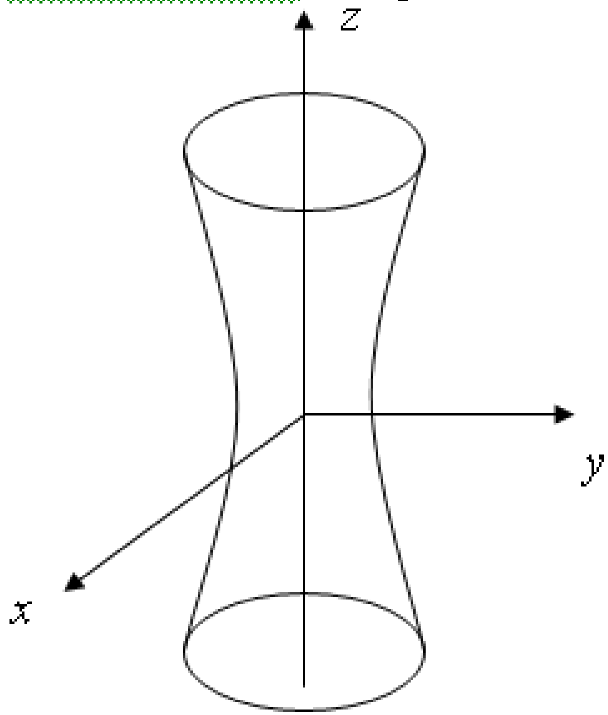
Способы задания функций.

1. Аналитический:

а) явный $z = f(x, y)$, например: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

б) неявный $F(x, y, z) = 0$, например: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2. Графический, например: однополостной гиперболоид

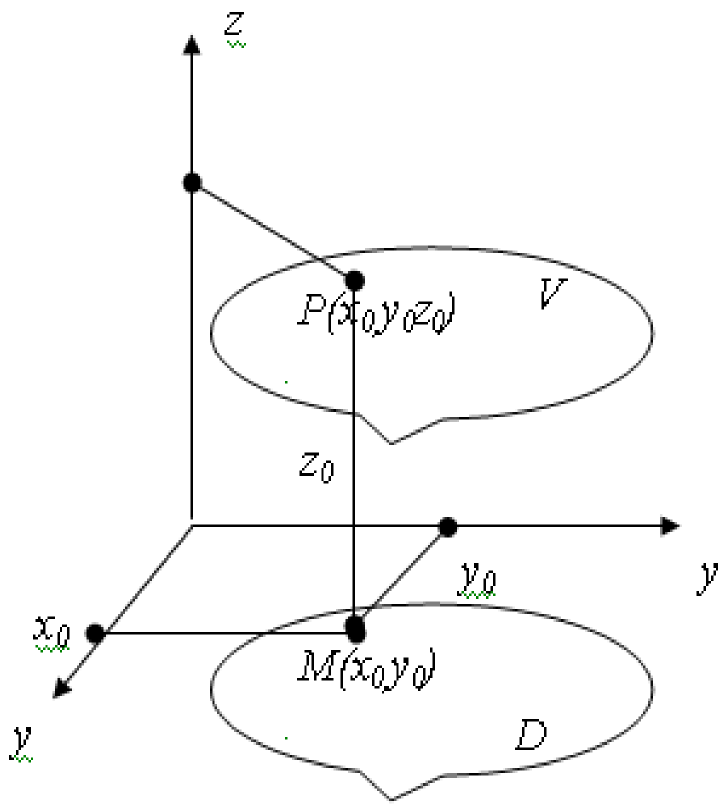


3. Табличный

y/x	x_1	x_2	…	x_0
y_1	z_{11}	z_{21}	…	z_{n1}
y_2	z_{12}	z_{22}	…	z_{n2}
…	…		…	…
y_n	z_{1m}	z_{2m}	…	z_{nm}

Геометрический смысл функции двух переменных.

Каждой точки в области D соответствует точка в пространстве, множество этих точек в пространстве образуют поверхность.



Вывод: Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, проекция которой на плоскость xoy является областью D.

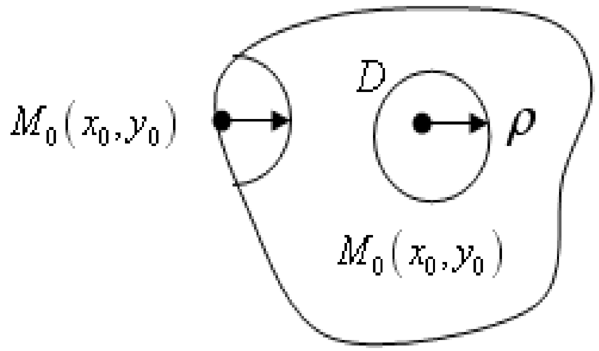
Определение функции многих переменных.

$U = f(x, y, z...t)$ называется функция многих переменных, если каждой совокупностью значений $x, y, z...t \in D$ соответствует одно и вполне определенное значение $U \in V$.

$D \in R^n$, $V \in R^{n+1}$

Предел функции двух переменных.

Определение: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ называется круг (если точка внутри) или часть круга (если точка граничная) бесконечно малого радикса ρ.



Определение: Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ если $\exists O\rho(M_0)$ такая, что $\forall x, y \in O\rho(M_0)$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$

Обозначение предела для функции двух переменных: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

Пример: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x - 2y) = -3$

Обозначение предела для функции многих переменных: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0 \\ \dots t \to t_0}} f(x, y, z, \dots t) = A$

Непрерывная функция двух переменных и её свойства. Точка и линия разрыва.

Определение: Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$, если она определена $\forall x, y \in O\rho(M_0)$ и в самой точке M_0 выполняется следующее неравенство: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Свойства непрерывных функций.

1. Сумма и произведение непрерывных функций являются непрерывной функцией.
2. Частное непрерывных функций является непрерывной функцией, если функция знаменателя не равна нулю.
3. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, является непрерывной функцией.
4. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ принимает не нулевое значение, то $\exists O\rho(M_0)$ такая, что $\forall x, y \in O\rho(M_0)$ функция имеет тот же знак, что и в точке M_0

5. В замкнутой области непрерывная функция всегда имеет минимальные и максимальные значения.
6. $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \to 0)$ замкнутую область можно разбить на такие части каждой из которых приращение функций будет $< \varepsilon$.
7. Если замкнутая область стремится в точку, то приращение функций стремится к нулю.

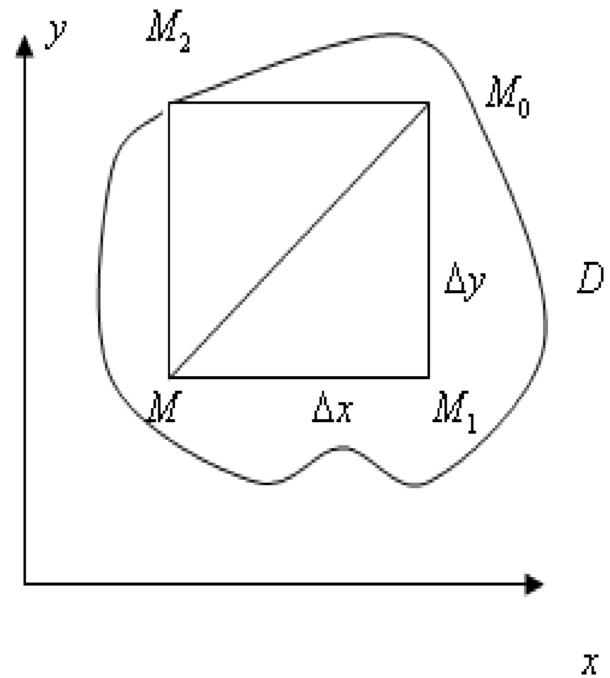
Точка разрыва.

Определение: Точка M_0 называется точкой разрыва, если в этой точке не выполняется условие непрерывности т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$

Линия разрыва.

Определение: Геометрическое место точки разрыва называется линией разрыва.

Полное и частные приращения функций.



На рисунке обозначены точки: $M(x,y)$; $M_0(x+\Delta x, y+\Delta y)$; $M_1(x+\Delta x, y)$; $M_2(x, y+\Delta y)$ и D -область определения функции.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ при переходе из точки $M(x, y)$ в точку $M_0(x+\Delta x, y+\Delta y)$ вычислим её приращение: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ (1)

Определение: Полным приращением функции называется такое приращение, при котором одновременно изменяются все её переменные (1).

$$\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \quad (2)$$

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$

Определение: Частным приращением функции называется такое её приращение, при котором изменяется только одна из всех переменных, формула (2), (3)

Замечание: Количество частных приращений определяется числом аргументов.

Замечание: В общем случае $\Delta z \neq \Delta z_x + \Delta z_y$ равенство возможно только в случае, если функция представляет собой плоскость.

Определение непрерывной функции через полное приращение.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\to \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0,y_0)\to \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y)-\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x_0,y_0)=0$$

$$\lim_{\substack{x-x_0\to 0\\ y-y_0\to 0}}\left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right]=0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

Определение: Функция называется непрерывной в точке, если предел её полного приращения в этой точке равен нулю при устремлении к нулю приращения всех её аргументов.

Частные производные и их геометрический смысл.

Определение: Частной производной называется предел отношения соответствующего частного приращению функции к приращению соответствующего аргумента при устремлении к нулю приращения соответствующего аргумента.

Обозначение частных производных.

$$z'_x = f_x'(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = f_y'(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Замечание: Количество частных производных определяется количеством аргументов функций.

Пример:

$$z = x^2 + y^2 - 3xy$$

$$\Delta z_x = \left(x + \Delta x\right)^2 + y^2 - 3\left(x + \Delta x\right)y - x^2 - y^2 + 3xy = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3xy - 3\Delta xy - x^2 + 3xy = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta xy$$

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x + \Delta x - 3y\right) = 2x - 3y$$

$$\Delta z_y = x^2 + \left(y + \Delta y\right)^2 - 3x\left(y + \Delta y\right) - x^2 - y^2 + 3xy = y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 3xy - 3x\Delta y - y^2 + 3xy =$$

$$2y\Delta y + \Delta y - 3x\Delta y$$

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(2y + \Delta y - 3x\right) = 2y - 3x$$

Правило: Частные производные можно искать как производные функции одного переменного, считая другие переменные в этот момент константами.

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 0 - 3y; \quad \frac{dz}{dy} = 0 + 2y - 3x$$

Частные производные второго порядка.

Замечание: Частных производных 2-го порядка для функции двух переменных четыре.

Замечание: Количество частных производных n-ого порядка для функции относительно k переменных определяется по формуле: k^n.

Обозначение частных производных второго порядка.

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x'(x+\Delta x,y)-f_x'(x,y)}{\Delta x};\quad \frac{d^2z}{dxdy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x'(x,y+\Delta y)-f_x'(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_y'(x,y+\Delta y)-f_y'(x,y)}{\Delta y};\quad \frac{d^2z}{dydx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y'(x+\Delta x,y)-f_y'(x,y)}{\Delta x}$$

Замечание: $\frac{d^2z}{dxdy},\frac{d^2z}{dydx}$ - смешанные производные.

Пример: $z = x^4 + x^3y^2 + y^5 + 2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 3x^2y^2; (1) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 5y^4; (2)$$

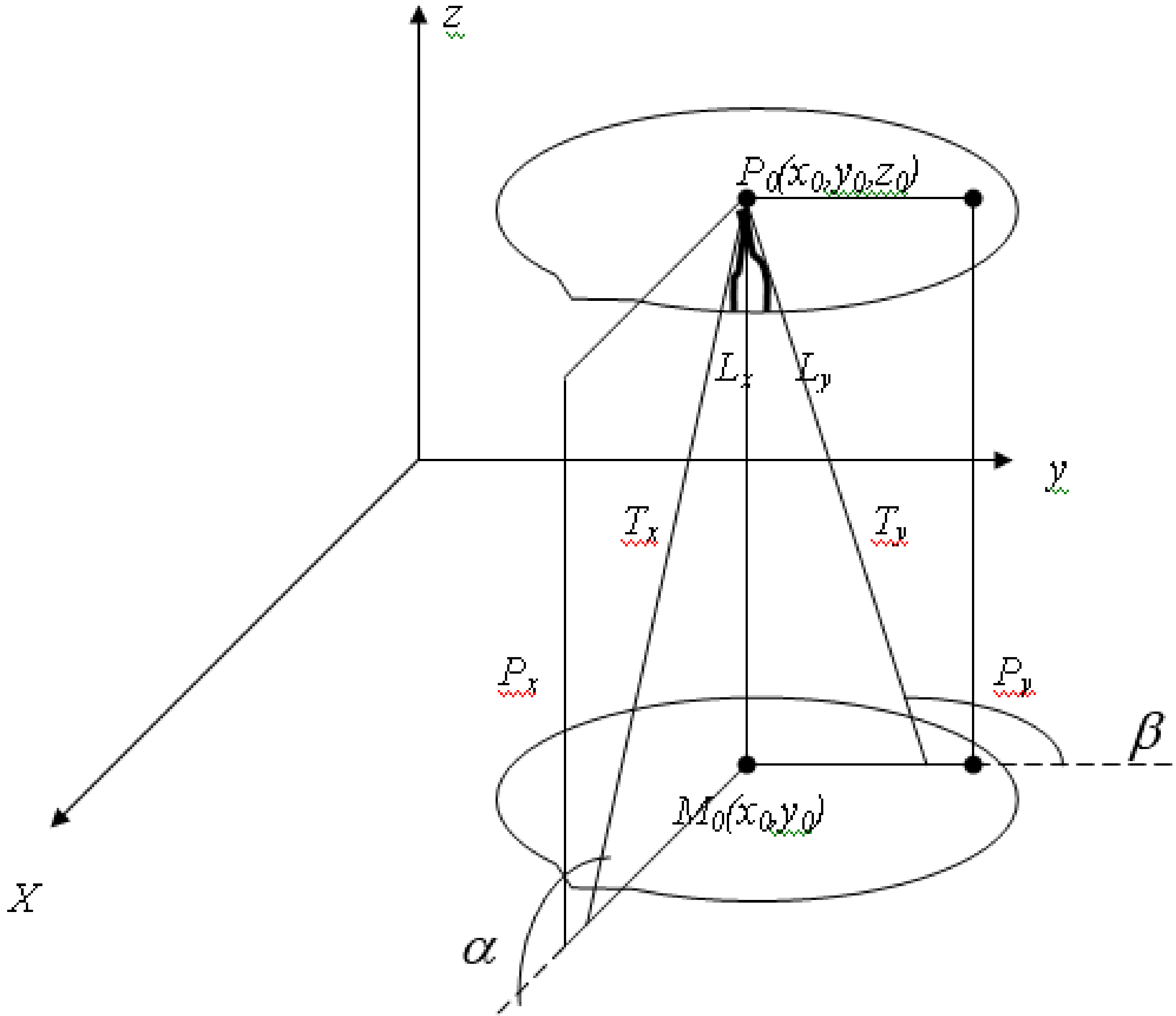
Дифференцируя (1) и (2) по x и y, получаем от каждой производной 1 порядка по две производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 6xy^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 20y^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y;$$

Вывод: Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования и смешанные производные равны между собой.

Геометрический смысл частных производных.



Через прямую M_0P_0 проводим плоскости: $P_x \parallel xoz; P_y \parallel yoz$

Во всех точках плоскости P_x $y = y_0$, а P_y $x = x_0$

В сечениях поверхности плоскостями получаются линии L_x, L_y

Уравнения этих линий: $L_x : f\left(x, y_0\right),\ L_y '' f\left(x_0, y\right)$.

Эти уравнения описываются функциями, только одного переменного.
Для функции одного переменного производная численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в данной точке.

$$tg\alpha = f_x'\left(x, y_0\right)|_{x=x_0};\ \ tg\beta = f_y'\left(x_0, y\right)|_{y=y_0} \rightarrow tg\alpha = \frac{\partial z\left(x_0, y_0\right)}{\partial x};\ \ tg\beta = \frac{\partial z\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}$$

Частные производные численно равны тангенсам угла наклона касательных, проведённых к соответствующим сечениям поверхности в заданной точке.

Условие дифференцируемости функции двух переменных и полный дифференциал.

Выпишем полное приращение функции:

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)$$

$$\Delta z = \underbrace{f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y+\Delta y\right)}_{\Delta z_1} + \underbrace{\left[f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)\right]}_{\Delta z_2}$$

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 \quad (1)$$

Для вычисления частных приращений $\Delta z_1, \Delta z_2$ используем теорему Лагранжа:

$$f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(x_0\right)\left(b-a\right);\ x_0 \in \left[a,b\right]$$

Для $\Delta z_1 : a = x; b = x + \Delta x; \; b - a = \Delta x; \; x_0 \in [x, x + \Delta x];$

$$f'(x_0) = \frac{\partial z(x_0, y + \Delta y)}{\partial x} \to \Delta z_1 = \frac{\partial z(x_0, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x \quad (2)$$

Для $\Delta z_2 : a = y; b = y + \Delta y; \; b - a = \Delta y; \; y_0 \in [y, y + \Delta y];$

$$f'(y_0) = \frac{\partial z(x, y_0)}{\partial y} \to \Delta z_2 = \frac{\partial z(x, y_0)}{\partial y} \Delta y \quad (3)$$

Вычислим от каждой из частных производных входящие в (3), (2) пределы:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial z(x_0, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial z(x, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

Используем шестое свойство бесконечно малых:

$$\frac{\partial z\left(x_0, y+\Delta y\right)}{\partial x} = \frac{\partial z\left(x, y\right)}{\partial x} + \gamma_1 - б.м. \quad (6)$$

$$\frac{\partial z\left(x, y_0\right)}{\partial y} = \frac{\partial z\left(x, y\right)}{\partial y} = \gamma_2 - б.м. \quad (7)$$

Подставляем (6) в (2), (7) в (3) и полученные $\Delta z_1, \Delta z_2$ в приращение (1):

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial z}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \quad (8)$$

Формула (8) определяет условие дифференцируемости функции двух переменных.

Сравним первое и третье слагаемое в формуле (8) с Δx, второе и четвёртое с Δy.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \to \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x - \textit{одного порядка малости с } \Delta x \\ \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0 \to \gamma_1 \Delta x = 0\left(\Delta x\right) \end{array}\right\} \to$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x - бм$ более низкого порядка малости по сравнению с $\gamma_1 \Delta x$.

Значит первые два слагаемые являются главной частью суммы б.м.

Определение: Полным дифференциалом называется главная часть полного приращения функции и обозначается как : $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Дифференциалы высших порядков

Определение: Полным дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал, вычисленный от полного дифференциала первого порядка при условии, что **dx, dy** постоянны.

Определение: Полным дифференциалом **n**-ого порядка называется полный дифференциал, вычисленный от полного дифференциала **n-1** порядка при условии, что **dx, dy** постоянны.

$$d^2(z)= d(dz) \qquad (1),$$

$$d^n(z)= d\,(dz^{n-1}),$$

где полный дифференциал первого порядка $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ (2).

Предположим, что функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные, тогда подставив (2) в (1) получим:

$d^2(z)= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$. Обозначим круглую скобку, т.е. дифференциал (2) за z_1, тогда для неё полный дифференциал первого порядка можно вычислить по той же формуле (2):

$d^2(z)= dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}dx + \frac{\partial z_1}{\partial y}dy$ (3). Подставляем z_1 т.е. дифференциал (2) в (3):

$$d^2(z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\quad(4).$$

Выражения для полных дифференциалов первого (2) и второго (4) порядков можно записать в символическом виде:

$$dz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^1 z;\quad d^2(z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z;$$ Если возвестить в квадрат, получим формулу (4)

Отсюда можно записать символическую формулу полного дифференциала n-ого порядка:

$$\mathbf{d^2(z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z;}$$ Если возвестить в куб, получим формулу полного дифференциала **3**-ого порядка: (5)

$$d^3(z)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^3}\qquad(5)$$

Частные производные сложной функции двух переменных

Дано: функции z является сложной функцией двух переменных: $z = f(u,v)$, где u,v в свою очередь функции двух независимых переменных x,y: $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$. Функции z,u,v – непрерывные функции и имеют непрерывные частные производные.

Найти: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Дадим переменной x приращение Δx, не меняя y. Тогда функции u,v,z получат частные приращения $\Delta_x u$, $\Delta_x v$, $\Delta_x z$. Но для функции z изменятся сразу два аргумента: u,v, значит для функции z можно использовать формулу полного приращения функции:

$$\Delta_x z = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v,$$ где γ_1, γ_2 – бесконечно малые функции.

Разделим обе части на Δx и вычислим предел от левой и правой частей при $\Delta x \to 0$ При этом учитываем, что предел суммы, произведения равен сумме, произведению пределов, а частные производные от Δx не зависят и их можно выносить за знак предела.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\gamma_1 \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\gamma_2 \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

Но, по определению, предел отношения соответствующего приращения функции к приращению соответствующего аргумента есть частная производная, а предел бесконечно малых равен нулю, тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

Аналогично, давая приращение второй переменной y, можно получить частную производную по второму направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

Замечание: Частные производные сложной функции двух переменных можно считать по правилам дифференцирования сложной функции одного переменного, а формулами (6),(7) пользоваться только в тех случаях, когда функции очень громоздкая и, разбиение её на части с помощью функций u,v, даст упрощение расчетов.

Полный дифференциал сложной функции двух переменных

Вычислим
полный дифференциал первого порядка $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ (2).Подставим в (2) частные производные (6),(7)

$$dz = \left(\underline{\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}} + \underline{\underline{\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}}} \right) dx + \left(\underline{\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}} + \underline{\underline{\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}}} \right) dy$$

Раскроем скобки приведем подобные члены, подчеркнутые одной и двумя линиями:

$$dz = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \right) \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \right)$$

Каждая скобка по своей структуре совпадает с выражением полного дифференциала первого порядка (2), значит:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}du + \frac{\partial z}{\partial y}dv$$

Вывод: выражение полного дифференциала первого порядка не зависит от того является ли входящие в него переменные зависимыми (т.е. функциями) или независимыми переменными.

Производные от неявной функции двух переменных

Теорема: Если для неявной функции $F(x,y) = 0$ функция $F(x,y)$ и её частные производные являются непрерывными функциями, то производная от неявной функции одного переменного вычисляется по формуле :

$$\boxed{y' = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$$

Доказательство

Для функции $F(x,y) = 0$ (8) дадим переменной x приращение Δx, тогда y в силу того, что она является функцией от x, также получит приращение Δy. Следовательно (8) будет иметь вид: $F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$ (9)

Разность (9)-(8), равная нулю, будет являться полным приращением функции двух переменных, значит:

$$\Delta F = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y = 0,$$ где γ_1, γ_2 – бесконечно малые функции.

Разделим обе части на Δx и выделим $\Delta y/\Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\partial F/\partial x + \gamma_1}{\partial F/\partial y + \gamma_2}$$

Вычислим предел от левой и правой частей при $\Delta x \to 0$ При этом учитываем, что предел суммы, частного равен сумме, частному пределов, а частные производные от Δx не зависят и являются константами.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \partial F/\partial x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma_1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \partial F/\partial y + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma_2}$$

Но, по определению, предел отношения приращения функции к приращению аргумента есть производная, а предел бесконечно малых равен нулю, тогда:

$$y' = - \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \quad (10)\text{, ч.т.д.}$$

Рассмотрим теперь неявную функция двух переменных в виде: $F(x,y,z) = 0$. Когда мы ищем частную производную по x, то y считается постоянной, значит можно использовать формулу (10), заменяя в ней функцию y на функцию z, а аргумент x не изменяя. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

Когда мы ищем частную производную по y, то x считается постоянной, значит можно использовать формулу (10), заменяя в ней функцию y на функцию z, а аргумент x на аргумент y. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточные условия.

Определение: Функция $z = f(x,y)$ имеет максимум в т. $M_0(x_0,y_0)$, если $\forall x,y \in O_\rho(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0) > f(x,y)$$

Определение: Функция $z = f(x,y)$ имеет минимум в т. $M_0(x_0,y_0)$, если $\forall x,y \in O_\rho(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0) < f(x,y)$$

<u>Необходимое условие</u>

Если функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум (максимум или минимум) в т. $M_0(x_0,y_0)$, то каждая частная производная первого порядка от этой функции или обращается в ноль, или не существует (равна ∞) в т. $M_0(x_0,y_0)$.

Условные обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}.$$

Достаточные условия

Если функция $z = f(x,y)$ в некоторой области, содержащей т. $M_0(x_0,y_0)$, имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то в т. $M_0(x_0,y_0)$:

1. функция достигает своего максимума при выполнении условий: $A \times B - C^2 > 0$ и $A < 0$;
2. функция достигает своего минимума при выполнении условий: $A \times B - C^2 > 0$ и $A > 0$;
3. функция не имеет экстремума при выполнении условия: $A \times B - C^2 < 0$;
4. функция требует дополнительных исследований с привлечением частных производных более высокого порядка при выполнении условия: $A \times B - C^2 = 0$.

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области ищутся среди следующих точек:

1. Критические точки на экстремум из равенства нулю или бесконечности каждой частной производной первого порядка.
2. Угловые точки области, если таковые имеются.
3. Точки локального экстремума, которые получаются, если подставить уравнение границ области в исходную функцию z = f(x,y), получить при этом функцию одного переменного, и из равенства нулю или бесконечности каждой производной первого порядка найти эти точки.

Среди указаных точек выбираются те, для которых функция z = f(x,y), имеет наибольшее и наименьшее значения.

Пример: $z = x^3 + y^3 - 3xy - 5$, $x \in [0,4]$; $y \in [0,4]$

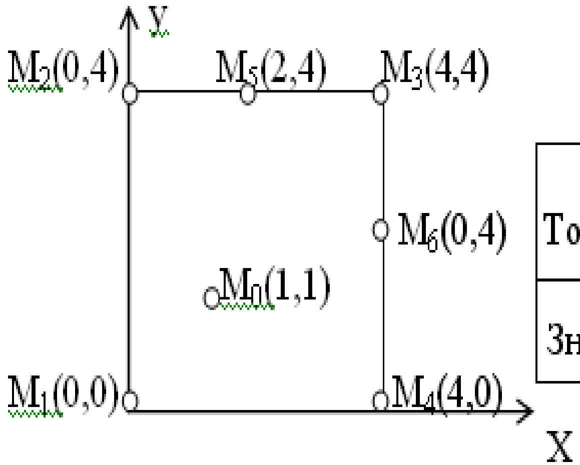


Таблица значений функции

Точки:	$M_0(1,1)$	$M_1(0,0)$	$M_2(0,4)$	$M_3(4,4)$	$M_4(4,0)$	$M_5(2,4)$	$M_6(4,2)$
Значения	$z_0 = -6$	$z_1 = -5$	$z_2 = 59$	$z_3 = 75$	$z_4 = 59$	$z_5 = 43$	$z_6 = 43$

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$; $\rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0$; $\rightarrow z_1 = 0+0-0-5 = -5$; $x_0 = 0, y_0 = 0 \rightarrow z_0 = 1+1-3-5 = -6$;

2. $M_2(0,4) \rightarrow z_2 = 0+64-0 = 59$; $M_3(4,4) \rightarrow z_3 = 64+64-3\times16 = 75$; $M_4(4,0) \rightarrow z_4 = 64+0-0 = 59$.

3. M_1M_2: $x = 0 \rightarrow z = 0+y^3-0-5 = y^3-5$; $\rightarrow z' = 3y^2 = 0$; $\rightarrow y = 0$; $\rightarrow M_1(0,0) \rightarrow z_1 = 0+0-0-5 = -5$;

M_2M_3: $y = 4 \rightarrow z = x^3+64-12x-5 = x^3-12x+59$; $\rightarrow z' = 3x^2-12 = 0$; $\rightarrow x = 2$; $\rightarrow M_5(2,4) \rightarrow z_5 = 8+64-24-5 = 43$;
($x=-2$ не входит в заданную область!)

M_3M_4: ч $= 4 \rightarrow z = y^3+64-12y-5 = y^3-12y+59$; $\rightarrow z' = 3y^2-12 = 0$; $\rightarrow y = 2$; $\rightarrow M_6(4,2) \rightarrow z_5 = 8+64-24-5 = 43$;
($y=-2$ не входит в заданную область!)

M_1M_4: $y = 0 \rightarrow z = 0+x^3-0-5 = y^3-5$; $\rightarrow z' = 3x^2 = 0$; $\rightarrow x = 0$; $\rightarrow M_1(0,0) \rightarrow z_1 = 0+0-0-5 = -5$;

Наибольшее значения функции $z_3 = 75$ в т. $M_3(4,4)$. Наименьшее значения функции $z_0 = -6$ в т. $M_0(1,1)$

Условный экстремум функции двух переменных, необходимые и достаточное условия

Определение: Экстремум функции $z = f(x,y)$ двух переменных x,y, которые связаны между собой некоторым условием: $\varphi(x,y) = a$ (a-const), называется условным экстремумом.

Необходимые условия

При наличии условия: $\varphi(x,y) = a$ из двух переменных x,y независимой будет x, а y – функцией от x. Тогда и функция $z = f(x,y)$ и функция $\varphi(x,y)$ будут сложными и частные производные от них необходимо искать как от сложных функций.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y(x))}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y(x))}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (11)$$

Аналогично находится производная от левой и правой частей условия: $\varphi(x,y) = a$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (12)$$

В точках экстремума частные производные 1 порядка равны нулю, значит

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (13)$$

Умножим (12) на неизвестный параметр λ и сложим полученное уравнение с (13)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \quad (14)$$

Подберем λ так, чтобы для $\forall x,y$ вторая скобка (14) обратилась в ноль. Тогда и первая скобка тоже обратится в ноль. Отсюда получим два уравнения относительно трех неизвестных x,y,λ. Присоединяя к ним условие $\varphi(x,y) = a$, получим три следующих необходимых условия существования условного экстремума относительно трех неизвестных x,y,λ:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0; \quad \varphi(x,y) = a \qquad (15)$$

Из условий (15) находятся координаты критический точек на условный экстремум $M_0(x_0,y_0)$

Достаточное условие

Если определитель $\Delta>0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ функция имеет условный минимум;

Если определитель $\Delta<0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ функция имеет условный максимум;

Если определитель $\Delta=0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ требуется дополнительное исследование с привлечением производных более высокого порядка.

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}; \quad F(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$$ – функция Лагранжа.

Пример: $z = x^2+xy$; $2x+y=1$.

Решение: $f(x,y) = x^2+xy$; $\varphi(x,y) = 2x+y$; $\lambda = -0.5$. Составляем систему (15)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$$

$$\begin{cases} 2x+y+2\lambda = \\ x+\lambda = 0 \\ 2x+y = 1 \end{cases}$$

Отсюда $M_0(0{,}5; 0)$; $\lambda = -1$. $F = x^2+xy - 0.5\,(2x+y)$.

$$\frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} = 1.$$

$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $\Delta < 0$, то в т. $M_0(0.5; 0)$ функция имеет условный максимум $z = 0.25 + 0.5*0 = 0.25$;