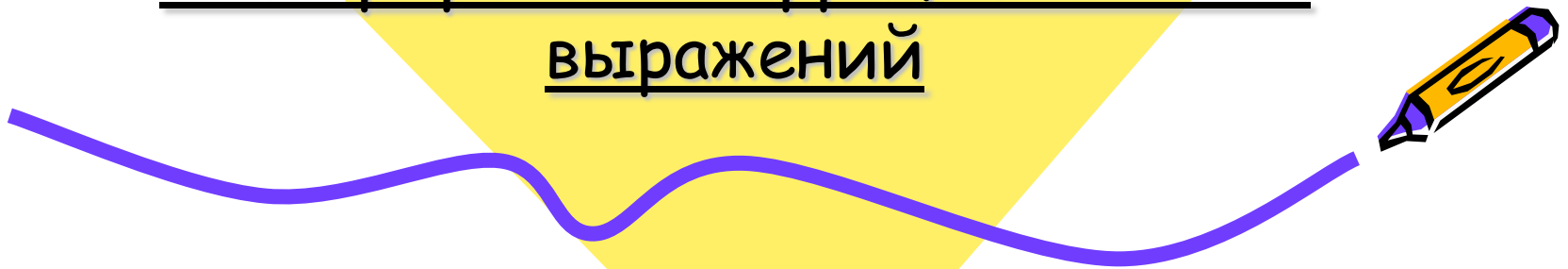


# Неопределенный интеграл

3 часть

Фёдоров Павел Борисович  
Сайт лекций по математике:  
[Fedorovkniga.jimdo.com](http://Fedorovkniga.jimdo.com)

Интегрирование иррациональных  
выражений



# Интегрирование иррационального выражения

$$\frac{h}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

## Алгоритм решения

1. Выделяется полный квадрат из подкоренного выражения:  $ax^2 + bx + c = a[(x+p)^2 \pm q^2]$

$$2. I = \int \frac{h}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{h}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}} dx.$$

3. Замена:  $t = x+p$ ;  $dx = dt$

$$I = \frac{h}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt$$

1 случай:  $a > 0$ , знак  $\pm$

$$I = \frac{h}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt = \frac{h}{\sqrt{a}} \ln |t + \sqrt{t^2 \pm q^2}| = \frac{h}{\sqrt{a}} \ln |x+p + \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}|$$

2 случай:  $a < 0$ , знак  $-$  в знаменателе.

$$I = \frac{h}{\sqrt{|a|}} \int \frac{1}{\sqrt{q^2 - t^2}} dt = \frac{h}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{q} = \frac{h}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{x+p}{2}$$

3 случай:  $a < 0$ , знак  $+$  в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

4. Прибавляем к одной из первообразных произвольную постоянную.

## Интегрирование иррационального выражения

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{где } a, b, c, m, n - \text{const}$$

1. Выделяем полный квадрат.

$$ax^2+bx+c = a[(x+p)^2 \pm q^2]$$

$$2. I = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{mx+n}{\sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{m(t-p) + n}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt$$

Замена:  $t = x+p$ ,  $x = t-p$ ;  $dx = dt$

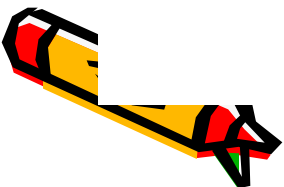
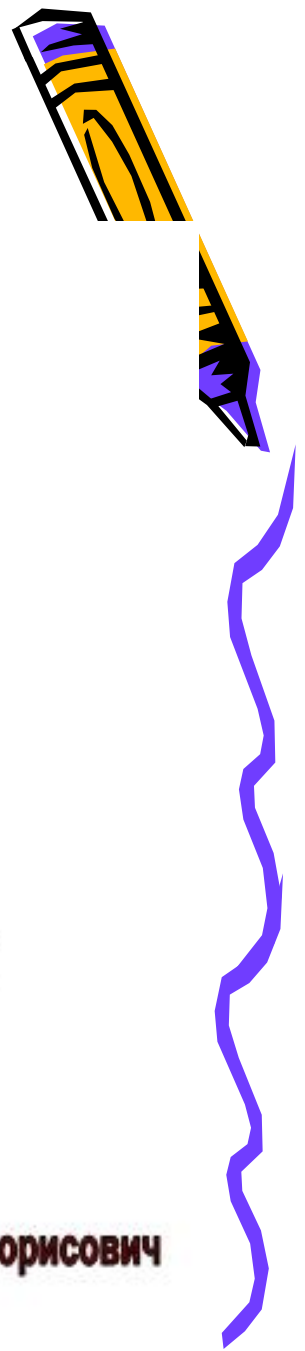
3. Разбиваем на сумму двух интегралов.

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \underbrace{\int \frac{mt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{n-mp}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt}_{I_2}$$

4. Вычислим  $I_1$ .

$$I_1 = \frac{m}{\sqrt{a}} \int \frac{t}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt = \frac{m}{a} \int \frac{t}{\sqrt{a}} \frac{du}{2t} = \frac{m}{2\sqrt{a}} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{m}{2\sqrt{a}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{m}{\sqrt{a}} \sqrt{t^2 \pm q^2} = \frac{m}{\sqrt{a}} \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}$$

Замена:  $u = t^2 \pm q^2$ ;  $du = 2tdt$ ;  $dt = \frac{du}{2t}$





5. Вычислим  $I_2$ .

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}$$

1 случай:  $a > 0$ , знак  $\pm$  в знаменателе.

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm q^2} \right| = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \ln \left| x+p + \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2} \right|$$

2 случай:  $a < 0$ , знак  $-$  в знаменателе.

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{q^2 - t^2}} = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{q} = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{x+p}{q}$$

3 случай:  $a < 0$ , знак  $+$  в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

6.  $I = I_1 + I_2 + C$



## Интегрирование иррационального выражения

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

### Алгоритм решения

1.  $ax^2 + bx + c = a[(x+p)^2 \pm q^2]$ ;  $I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \sqrt{a} \int \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2} dx$

2. замена:  $t = x + p$ ;  $dt = dx \rightarrow I = \sqrt{a} \int \sqrt{t^2 \pm q^2} dt$

3.  $a > 0$ , знак  $\pm$

$$I = \sqrt{a} \int \underbrace{\sqrt{t^2 \pm q^2}}_{I_0} dt; \quad I_0 = \int \sqrt{t^2 \pm q^2} dt$$

Интегрируем по частям:

$$I_0 = uv - \int v du; \quad u = \sqrt{t^2 \pm q^2} \rightarrow du = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt; \quad dv = dt \rightarrow v = t$$

$$I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} \rightarrow I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - \int \frac{(t^2 \pm q^2) \pm q^2}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} dt$$



Разобъём на 2 интеграла.

$$I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - \underbrace{\int \sqrt{t^2 \pm q^2} dt}_{-I_0} \pm q^2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} \rightarrow I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - I_0 \pm q^2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm q^2} \right|$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \left( t\sqrt{t^2 \pm q^2} \pm q^2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm q^2} \right| \right) \rightarrow I = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( t\sqrt{t^2 \pm q^2} \pm q^2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm q^2} \right| \right)$$

$$I = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( (x+p) \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2} \pm q^2 \ln \left| x+p + \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2} \right| \right) + C$$

4.  $a < 0$ , знак –

$$I = \sqrt{|a|} \int \sqrt{q^2 - t^2} dt$$

Применяем тригонометрическую подстановку:  $t = q \sin u \rightarrow u = \arcsin \frac{t}{q}$ ;  $dt = q \cos u du$ .

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{|a|} \int \sqrt{a^2 - q^2 \sin^2 u} q \cos u du = q^2 \sqrt{|a|} \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = q^2 \sqrt{|a|} \int \cos^2 u du = \\ &= q^2 \sqrt{|a|} \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{q^2 \sqrt{|a|}}{2} \left( u + \frac{\sin 2u}{2} \right) = \frac{q^2 \sqrt{|a|}}{2} \left( \arcsin \frac{t}{q} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arcsin \frac{t}{q} \right) \right) \end{aligned}$$

$$I = \frac{q^2 \sqrt{|a|}}{2} \left( \arcsin \frac{x+p}{q} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x+p}{q} \right) \right) + C$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович

