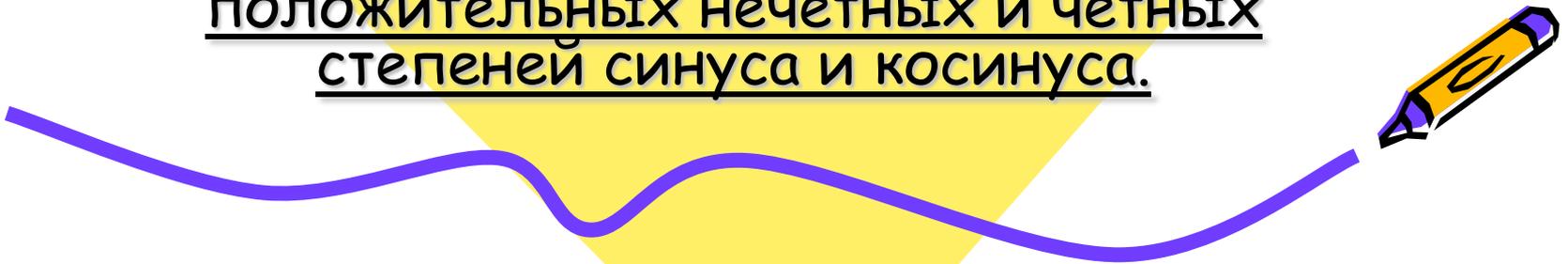
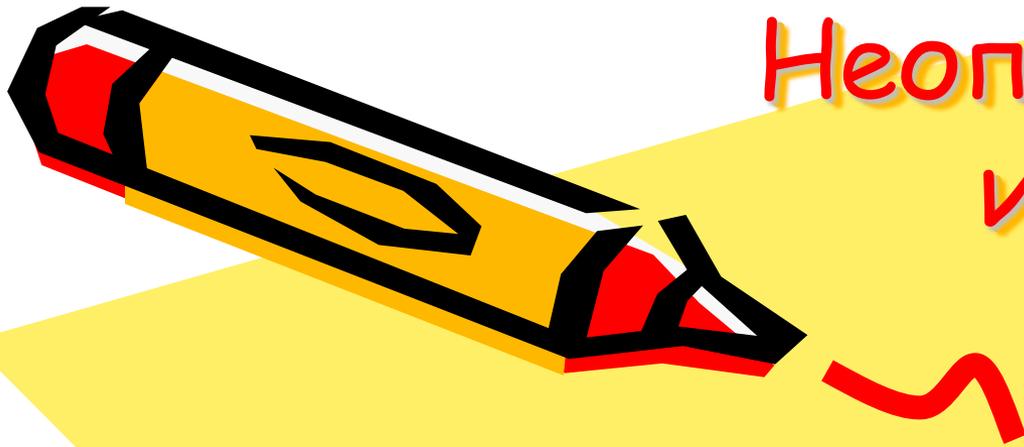


Неопределенный интеграл

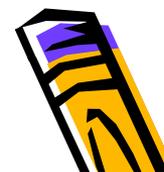
5 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Интегрирование целых
положительных нечетных и четных
степеней синуса и косинуса.



Интегрирование целых положительных нечетных степеней синуса и косинуса.



Дано: $I_1 = \int \sin^{2m+1} x dx,$

$$I_2 = \int \cos^{2m+1} x dx$$

Этапы решения:

1. Нечётная степень разбивается на чётную и первую степени соответствующих функций

$$I_1 = \int \sin^{2m} x \sin x dx,$$

$$I_2 = \int \cos^{2m} x \cos x dx$$

2. Чётная степень представляется в виде второй и m - ной степени.

$$I_1 = \int (\sin^2 x)^m \sin x dx,$$

$$I_2 = \int (\cos^2 x)^m \cos x dx$$

3. Используя основное тригонометрическое тождество, представляем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow I_1 = \int (1 - \cos^2 x)^m \sin x dx$$

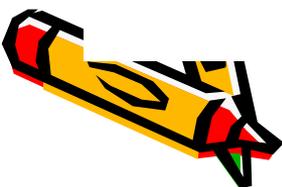
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow I_2 = \int (1 - \sin^2 x)^m \cos x dx$$

4. Замена: $I_1 \rightarrow t = \cos x \rightarrow dt = -\sin x dx,$

$$I_2 \rightarrow t = \sin x \rightarrow dt = \cos x dx$$

$$I_1 = -\int (1 - t^2)^m dt,$$

$$I_2 = \int (1 - t^2)^m dt$$





5. Возведение в любую степень выражения вида: $(1-a)$

$$(1-a)^m = 1 - ma + m(m-1)\frac{a^2}{2!} - m(m-1)(m-2)\frac{a^3}{3!} + \dots + (-1)^m a^m$$

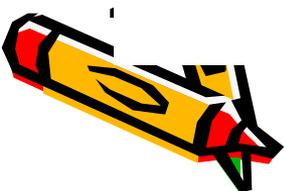
$$I_2 = \int \left(1 - mt^2 + m(m-1)\frac{t^4}{2} - m(m-1)(m-2)\frac{t^6}{6} + \dots + (-1)^m t^{2m} \right) dt$$

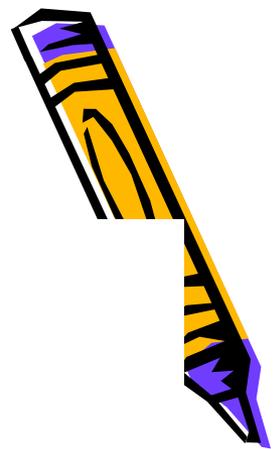
$$I_2 = t - m\frac{t^3}{3} + \frac{m(m-1)}{10}t^5 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}t^7 + \dots + \frac{(-1)^m}{2m+1}t^{2m+1}$$

$$I_2 = \sin x - \frac{m}{3}\sin^3 x + \frac{m(m-1)}{10}\sin^5 x - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\sin^7 x + \dots + \frac{(-1)^m}{2m+1}\sin^{2m+1} x + C$$

$$I_1 = -\cos x + \frac{m}{3}\cos^3 x - \frac{m(m-1)}{10}\cos^5 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\cos^7 x + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}\cos^{2m+1} x + C$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





Пример: $I = \int \sin^5 10x dx$

$$I = \int \sin^4 10x \sin 10x dx = \int (\sin^2 10x)^2 \sin 10x dx = \int (1 - \cos^2 10x)^2 \sin 10x dx$$

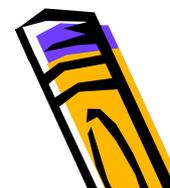
Замена: $t = \cos 10x \rightarrow dt = -10 \sin 10x dx \rightarrow I = \frac{1}{10} \int (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{10} \int (1 - 2t^2 + t^4) dt$

$$I = \frac{1}{10} \left(t - 2 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) = \frac{1}{10} \left(\cos 10x - 2 \frac{\cos^3 10x}{3} + \frac{\cos^5 10x}{5} \right) + C$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



Интегрирование целых положительных чётных степеней



синуса и косинуса.

Этапы решения:

Дано: $I_1 = \int \sin^{2m} x dx$; $I_2 = \int \cos^{2m} x dx$

1. Чётная степени представляется в виде второй и m -ной степени.

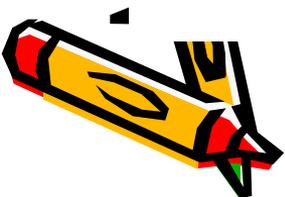
$$I_1 = \int (\sin^2 x)^m dx, \quad I_2 = \int (\cos^2 x)^m dx$$

2. Используется формула удвоения аргумента:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \quad \rightarrow I_1 = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^m dx$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} \quad \rightarrow I_2 = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^m dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2^m} \int (1 - \cos 2x)^m dx, \quad I_2 = \frac{1}{2^m} \int (1 + \cos 2x)^m dx$$



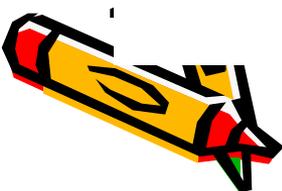


3. Возведение в любую степень и интегрирование:

$$I_1 = \frac{1}{2^m} \int \left(1 - m \cos 2x + m(m-1) \frac{\cos^2 2x}{2} - \frac{m(m-1)(m-2) \cos^3 2x}{6} + \dots + (-1)^m \cos^m 2x \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2^m} \left(x - \frac{m \sin 2x}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \right.$$
$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \int (1 - \sin^2 2x) \cos x dx + \dots + (-1)^m \int \cos^m 2x dx \right)$$

Замечание: Начиная с третьего слагаемого, интеграл содержит чередование чётных и нечётных степеней косинуса. Чётные степени интегрируются по методике этого вопроса, нечётные степени по методике предыдущего вопроса.

Замечание: В интеграле I_2 все знаки будут противоположные.





Пример: $I = \int \sin^6 20x dx$

$$I = \int (\sin^2 20x)^3 dx = \frac{1}{2^3} \int (1 - \cos 40x)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 40x + 3\cos^2 40x - \cos^3 40x) dx$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\int dx - 3 \int \cos 40x dx + \frac{3}{2} \int (1 + \cos 80x) dx - \int (1 - \sin^2 40x) \cos 40x dx \right)$$

Замена: $t = \sin 40x \rightarrow dt = 40 \cos 40x dx \rightarrow I = \frac{1}{8} \left(x - \frac{3}{40} \sin 40x + \frac{3}{2} \left(x + \frac{1}{80} \sin 80x \right) + \frac{1}{40} \int (1 - t^2) dt \right)$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x - \frac{3}{40} \sin 40x + \frac{3}{160} \sin 80x + \frac{1}{40} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right)$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x - \frac{3}{40} \sin 40x + \frac{3}{160} \sin 80x + \frac{1}{40} \left(\sin 40x - \frac{\sin^3 40x}{3} \right) \right)$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x - \frac{1}{20} \sin 40x + \frac{3}{160} \sin 80x + \frac{1}{120} \sin^3 40x \right) + C$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



Интегралы не имеющие первообразных в элементарных функциях

Интеграл вероятности: $I = \int e^{-x^2} dx$

Интегральный синус: $I = \int \frac{\sin x}{x} dx$

Интегральный косинус: $I = \int \frac{\cos x}{x} dx$

