Неопределенный интеграл

5 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Интегрирование целых положительных нечетных и четных степеней синуса и косинуса.

Интегрирование целых положительных нечетных степеней синуса и косинуса.

Дано: $I_1 = \int \sin^{2m+1} x dx;$ $\qquad I_2 = \int \cos^{2m+1} x dx$

Этапы решения:

1. Нечётная степень разбивается на чётную и первую степени соответствующих функций.

$$I_1 = \int \sin^{2m} x \sin x dx; \qquad I_2 = \int \cos^{2m} x \cos x dx$$

2. Чётная степень представляется в виде второй и m - ной степени.

$$I_1 = \int \left(\sin^2 x\right)^m \sin x dx; \qquad I_2 = \int \left(\cos^2 x\right)^m \cos x dx$$

3. Используя основное тригонометрическое тождество, представляем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \to I_1 = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^m \sin x dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \to I_2 = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^m \cos x dx$$

4. Замена: $I_1 \to t = \cos x \to dt = -\sin x dx,$ $\qquad I_2 \to t = \sin x \to dt = \cos x dx$

$$I_1 = -\int \left(1 - t^2\right)^m dt; \qquad I_2 = \int \left(1 - t^2\right)^m dt$$

5. Возведение в любую степень выражения вида: $(1-a)$

$$(1-a)^m = 1 - ma + m(m-1)\frac{a^2}{2!} - m(m-1)(m-2)\frac{a^3}{3!} + .. + (-1)^m a^m$$

$$I_2 = \int\left(1 - mt^2 + m(m-1)\frac{t^4}{2} - m(m-1)(m-2)\frac{t^6}{6} + \ldots + (-1)^m t^{2m}\right)dt$$

$$I_2 = t - m\frac{t^3}{3} + \frac{m(m-1)}{10}t^5 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}t^7 + \ldots + \frac{(-1)^m}{2m+1}t^{2m+1}$$

$$I_2 = \sin x - \frac{m}{3}\sin^3 x + \frac{m(m-1)}{10}\sin^5 x - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\sin^7 x + \ldots + \frac{(-1)^m}{2m+1}\sin^{2m+1} x + C$$

$$I_1 = -\cos x + \frac{m}{3}\cos^3 x - \frac{m(m-1)}{10}\cos^5 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\cos^7 x + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}\cos^{2m+1} x + C$$

Пример: $I=\int \sin^5 10x\,dx$

$$I=\int \sin^4 10x\,\sin 10x\,dx=\int\left(\sin^2 10x\right)^2 \sin 10x\,dx=\int\left(1-\cos^2 10x\right)^2 \sin 10x\,dx$$

Замена: $t=\cos 10x \rightarrow dt=-10\sin 10x\,dx \rightarrow \quad I=\frac{1}{10}\int\left(1-t^2\right)^2 dt=\frac{1}{10}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt$

$$I=\frac{1}{10}\left(t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)=\frac{1}{10}\left(\cos 10x-2\frac{\cos^3 10x}{3}+\frac{\cos^5 10x}{5}\right)+C$$

Интегрирование целых положительных чётных степеней синуса и косинуса.

Этапы решения:

Дано: $I_1 = \int \sin^{2m} x dx;$ $\qquad$ $I_2 = \int \cos^{2m} x dx$

1. Чётная степени представляется в виде второй и m-ной степени.

$$I_1 = \int \left(\sin^2 x\right)^m dx; \qquad I_2 = \int \left(\cos^2 x\right)^m dx$$

2. Используется формула удвоения аргумента:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{2} \qquad \to I_1 = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m dx$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \qquad \to I_2 = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^m dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2^m} \int \left(1-\cos 2x\right)^m dx; \qquad I_2 = \frac{1}{2^m} \int \left(1+\cos 2x\right)^m dx$$

3. Возведение в любую степень и интегрирование:

$$I_1=\frac{1}{2^m}\int\left(1-m\cos 2x+m(m-1)\frac{\cos^2 2x}{2}-\frac{m(m-1)(m-2)\cos^3 2x}{6}+\ldots+(-1)^m\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(\begin{aligned}&x-\frac{m\sin 2x}{2}+\frac{m(m-1)}{2}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx-\\&-\frac{m(m-1)(m-2)}{6}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos x dx+\ldots+(-1)^m\int\cos^m 2x dx\end{aligned}\right)$$

Замечание: Начиная с третьего слагаемого, интеграл содержит чередование чётных и нечётных степеней косинуса. Чётные степени интегрируются по методике этого вопроса, нечётные степени по методике предыдущего вопроса.

Замечание: В интеграле I_2 все знаки будут противоположные.

Пример: $I = \int \sin^6 20x dx$

$$I = \int \left(\sin^2 20x\right)^3 dx = \frac{1}{2^3}\int \left(1-\cos 40x\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int \left(1-3\cos 40x+3\cos^2 40x-\cos^3 40x\right) dx$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\int dx - 3\int \cos 40x dx + \frac{3}{2}\int \left(1+\cos 80x\right) dx \quad \int \left(1-\sin^2 40x\right)\cos 40x \, dx\right)$$

Замена: $t = \sin 40x \rightarrow dt = 40\cos 40x dx \rightarrow$ $\quad I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{3}{40}\sin 40x + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{80}\sin 80x\right) + \frac{1}{40}\int \left(1-t^2\right) dt\right)$

$$\boxed{I = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{40}\sin 40x + \frac{3}{160}\sin 80x + \frac{1}{40}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right)}$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{40}\sin 40x + \frac{3}{160}\sin 80x + \frac{1}{40}\left(\sin 40x - \frac{\sin^3 40x}{3}\right)\right)$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{20}\sin 40x + \frac{3}{160}\sin 80x + \frac{1}{120}\sin^3 40x\right) + C$$

Интегралы не имеющие первообразных в элементарных функциях

Интеграл вероятности: $I = \int e^{-x^2} dx$

Интегральный синус: $I = \int \frac{\sin x}{x} dx$

Интегральный косинус: $I = \int \frac{\cos x}{x} dx$