

# Числовые ряды

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:  
[Fedorovkniga.jimdo.com](http://Fedorovkniga.jimdo.com)



Числовой ряд и его сумма.

Ряд составленный из членов геометрической прогрессии (РГП).

Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.

Свойства сходящихся числовых рядов.

Понятие знакоположительного ряда. Лемма о его сходимости.

Два признака сравнения для оценки сходимости знакоположительного ряда.

Признаки сходимости знакоположительного ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак Коши.

Знакопеременный ряд. Признаки сходимости: Лейбница и Абеля-Дирихле.

Знакопеременный ряд. Достаточный признак его абсолютной сходимости.

Знакопеременный ряд, достаточный признак его условной сходимости.



# Числовой ряд и его сумма.

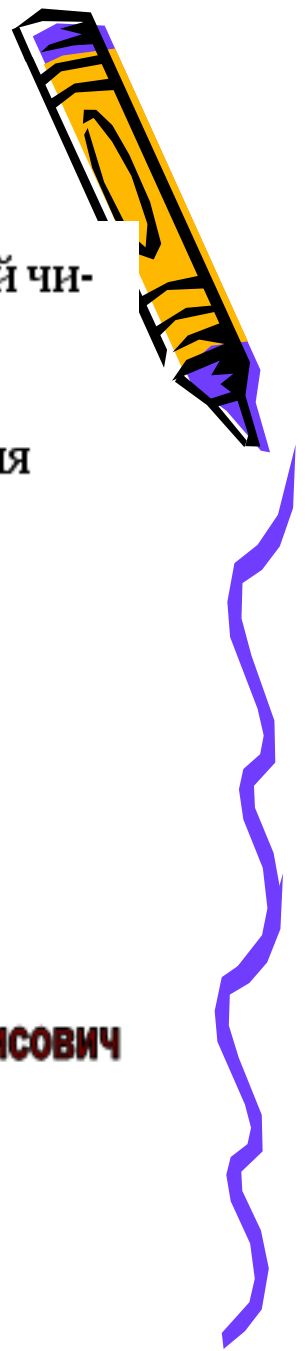
Определение: Числовым рядом называется сумма членов бесконечной числовой последовательности.

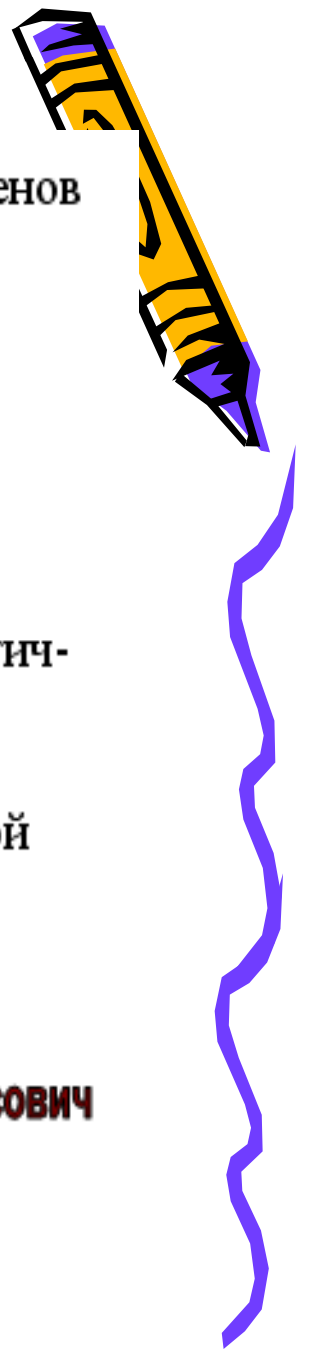
Определение: Общим членом ряда называется такое его слагаемое, для которого можно составить функцию его порядкового номера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots a_n = \frac{1}{n} \quad a_n - \text{общий член}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{гармонический ряд}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Определение: Частичной суммой ряда называется сумма первых  $n$  членов этого ряда.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Определение: Суммой ряда называется предел его частичной суммы

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Определение: Ряд называется сходящимся, если предел его любой частичной суммы существует и конечен.

Определение: Ряд называется расходящимся, если предел его частичной суммы не существует или бесконечен.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



# Ряд составленный из членов геометрической прогрессии (РГП).

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1},$$

где  $a_1$  - 1-ый член ряда,  $q$  - знаменатель.

Составим частичную сумму:  $S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1}$  (1)

Умножим левую и правую части (1) на  $q$ :  $qS_n = a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$  (2).

Вычитаем (2) из (1)  $\rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Например:

Легенда: Изобретателю шахмат эмир пообещал любую награду. Изобретатель предложил эмиру на 1 клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую клетку в 2 раза больше и т.д.

$$n = 64 \quad a_1 = 1 \quad q = 2$$

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$





Вычислим предел частичной суммы для исследования ряда на сходимость:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n)$$

1-й случай:  $|q| < 1$ , пусть  $q = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a_1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{a_1}{1-q}$  – конечное число.

2-й случай:  $|q| > 1 \rightarrow \frac{a_1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = \infty \rightarrow$  ряд расходится.

3-й случай:  $q = 1 \rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ раз}} = na_1; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na_1 = \infty \rightarrow$  ряд расходится.

4-й случай:  $q = -1$

$$S_n = a_1 - a_1 + a_1 = a_1$$

$$S_n = a_1 - a_1 = 0$$

Предел от составленной частичной суммы не существует т.к. эта функция не однозначна, а предел должен быть единственен.

Вывод: РГП – сходится, если  $|q| < 1 \rightarrow S = \frac{a_1}{1-q}$  и расходится, если  $|q| \geq 1$ .

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



# Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.



Теорема: Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\forall n)$$

$$- \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{cases}$$

-----

$$S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Замечание: Необходимый признак не является достаточным.

Замечание: Если предел  $a_n \neq 0$ , то ряд расходится.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





## Гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \rightarrow \text{необходимый признак выполняется.}$$

$$S_n^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

Составим частичную сумму для вспомогательного ряда

$$S_n^{(2)} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{a_1^{(2)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{a_2^{(2)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{a_3^{(2)}}$$

$$S_1^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} ; \quad S_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 ; \quad S_3^{(2)} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \quad \dots \dots \dots$$

$$\rightarrow S_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty \Rightarrow \text{второй ряд расходится}$$

Из сравнения видно,  $S_n^{(1)} > S_n^{(2)} \Rightarrow$  первый ряд больше второго, сумма второго ряда бесконечна  $\Rightarrow$  сумма первого ряда бесконечна  $\Rightarrow$  первый ряд расходится.

Вывод: Гармонический ряд является расходящимся.



# Свойства сходящихся числовых рядов.

1-е свойство: Если числовой ряд сходится, то прибавление или вычитание конечного числа членов ряда не меняет его сходимость, а перестановка конечного числа членов ряда не меняет ни сходимость, ни сумму этого ряда.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S; \quad S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_k}_{S_k} + \underbrace{a_{k+1} + \dots + a_n}_{S_{kn}}$$

$$S_n = S_k + S_{kn} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_k + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{kn}; \quad S = S_k + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{kn} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{kn} = S - S_k = S^{(kn)} - \text{конечное число.}$$

Частичная сумма  $S_{kn}$  соответствует ряду, полученному из исходного, если из него убрать первые  $k$ -слагаемые, этот ряд сходится, т.к. предел его частичной суммы конечное число.  $\rightarrow$  сходимость не изменится, если из ряда вычесть конечное число членов этого ряда.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович







$$S = S_k + S^{(kx)} = S^{(kx)} + S_k \rightarrow$$

сумма ряда не изменится при перестановки конечного числа членов ряда.

Под  $S^{(kx)}$  и  $S_k$  скрываются суммы членов ряда, значит, от перестановки конечного числа членов ряда сумма и сходимость не меняются.

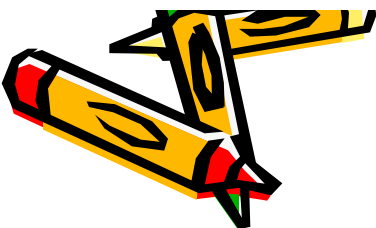
2-е свойство: Произведение сходящегося ряда на константу образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится (1)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}, \quad S_n^{(1)} = a_1 + \dots + a_n \quad c - \text{const} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n \quad (2).$$

$$S_n^{(2)} = ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cS_n^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = cS^{(1)} = S^{(2)} - \text{конечное число} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow S^{(2)} = c \cdot S^{(1)}$$



3-е свойство: Сумма двух сходящихся рядов образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}, S_n^{(1)} = a_1 + \dots + a_n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}, S_n^{(2)} = b_1 + \dots + b_n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \rightarrow S_n^{(3)} = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = S^{(1)} + S^{(2)} = S^{(3)} - \text{конечное число} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) \rightarrow S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$$



# Понятие знакоположительного ряда.

## Лемма о его сходимости.

Определение: Знакоположительным называется ряд, у которого все члены положительные.

Лемма: Для того, чтобы знакоположительный числовой ряд сошелся, необходимо и достаточно, чтобы частичная сумма была ограничена.

Доказательство:

Необходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – сходится ( $a_n > 0$ )  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Ряд знакоположительный  $\rightarrow (S_n > 0, S > 0) \rightarrow S_n < S \rightarrow$   
 $\rightarrow S_n$  – ограниченная функция, т.к. удовлетворяет условию  
ограниченности:  $|f(x)| < M > 0$

Достаточность:  $S_n$  – ограниченность  $\Rightarrow S_n < S, S_1 < S_2 < S_3 \dots <$   $\rightarrow$  частичная сумма представляет монотонно возрастающую и сверху ограниченную функцию  $\rightarrow$  по признаку Вейерштрасса эта функция имеет предел  
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \rightarrow$  ряд сходится.



# Два признака сравнения для оценки сходимости знакоположительного ряда.

Признак сравнения:

Если для двух знакоположительных рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1);  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (2), начиная с некоторого номера  $k$  выполняется следующее условие:  $a_n \leq b_n$  ( $\forall n = k, \infty$ ) (3), то:

- 1) Ряд (1) сходится при условии сходимости большего ряда (2).
- 2) Ряд (2) расходится при условии расходимости меньшего ряда (1).

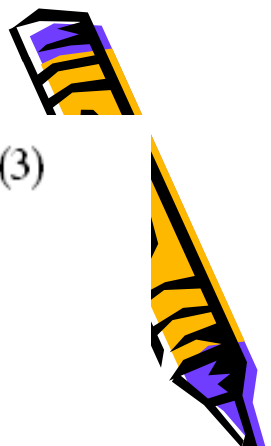
Доказательство:

Составим из ряда (2) дополнительный ряд:  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  (4). Пусть 2-й ряд сходится, значит по 1-му свойству сходящихся рядов, будет сходиться и 4-й ряд. Составим из 1-го ряда дополнительный ряд:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  (5). Из условия (3) следует, что  $S_n^{(5)} \leq S_n^{(4)}$ .

Если 4-й ряд сходится, то по лемме его частная сумма ограничена

$S_n^{(4)} < S^{(4)} \rightarrow S_n^{(5)} < S^{(4)} \rightarrow S_n^{(5)}$  - ограниченная, значит, по лемме сходится 5-й ряд, значит, по 1-му свойству сходящихся рядов будет сходиться и 1-й ряд.





Пусть 1-й ряд расходится, значит: расходится и 5-й ряд,  $\rightarrow S_n^{(5)} \rightarrow \infty$ . Из условия (3) следует:  $S_n^{(5)} < S_n^{(4)} \rightarrow S_n^{(4)} \rightarrow \infty$ .

Вывод: Значит: 4-й и 2-й ряды расходятся.

Порядок исследования на сходимость по признаку сравнения.

- 1) Исследуемый ряд считаем рядом (1) и для него подбираем сходящийся ряд (2). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд сходится, в противном случае переход ко второму пункту.
- 2) Исследуемый ряд обозначаем как ряд (2) и для него подбираем расходящийся ряд (1). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд расходится. В противном случае переход к п.3.
- 3) Признак не применим, исходный ряд требуется исследовать по другим признакам.

Недостатки признака сравнения:

- 1) Требуется 1 или 2 дополнительных ряда с известными свойствами.
- 2) Требуется вычислять значения членов ряда для поиска такого номера (k), начиная с которого будет выполняться условие (3).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = S^{(1)}$

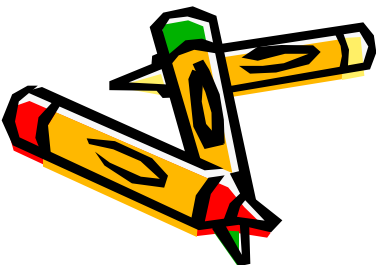
$$S^{(1)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \dots$$

Сравним со сходящимся РГП:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S^{(1)} > S^{(2)} \rightarrow$  условие (3) не выполняется, переходим к п.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = S^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \rightarrow$$

$S^{(1)} > S^{(3)} \rightarrow$  условие (3) выполняется и исходный ряд (1) расходится.



## Предельный признак сравнения.

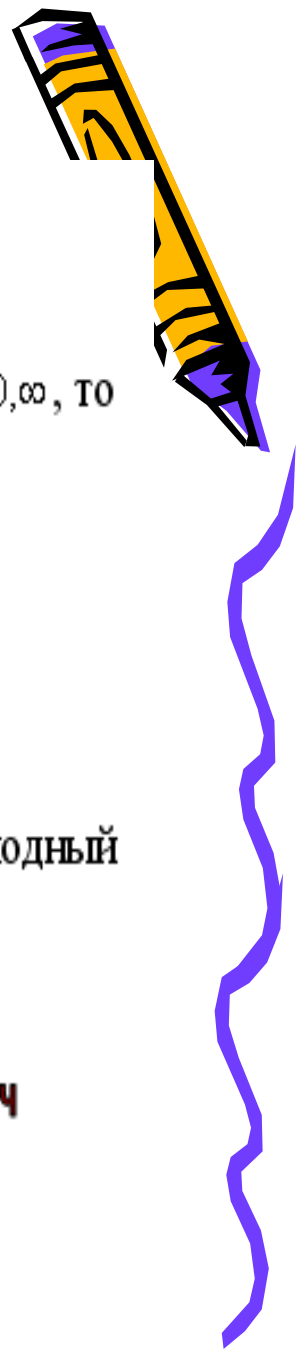
Если для 2-х знакоположительных рядов (1) и (2) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0, \infty$ , то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

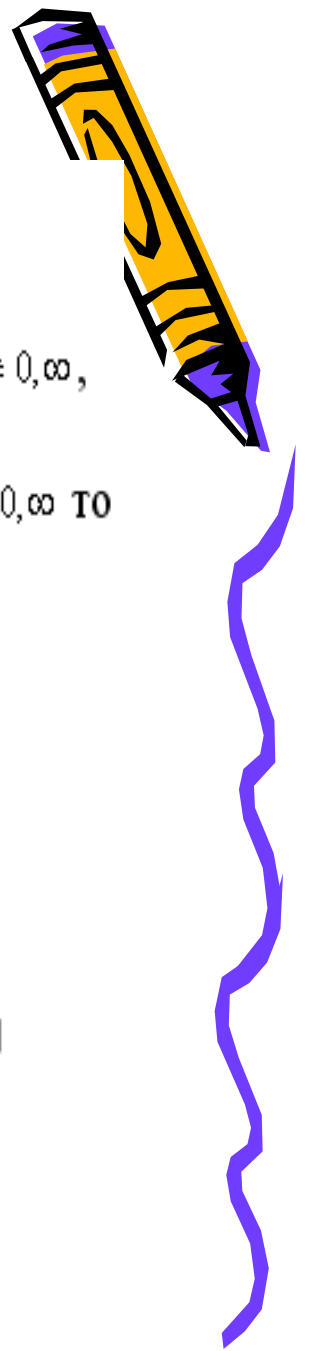
Доказательство:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq c \rightarrow a_n \leq cb_n$ , пусть 2-й ряд сходится, тогда по 2-му свойству

сходящихся рядов будет сходиться ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n$ , значит по признаку сравнения исходный ряд (1) сходится.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Порядок исследования на сходимость по предельному признаку:

1. Для исходного ряда подбирается сходящийся и вычисляется предел  $c$ . Если  $c \neq 0, \infty$ , то исходный ряд сходится, в противном случае п.2.
2. Для исходного ряда подбирается расходящийся ряд и вычисляется  $c$ . Если  $c \neq 0, \infty$  то исходный ряд расходится, в противном случае п.3.
3. Признак не применим, необходимо использовать другой признак.

Недостаток этого признака:

Требуется 1 или 2 ряда с известными свойствами.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример:  $\sum_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$ .

Сравним со сходящимся РГП:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{n}{2n+1} \right)^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^n$$

Используем 2-й замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{nx} = e^{kx}$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0, \infty \rightarrow \text{значит ряд исходный ряд сходится.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



# Признаки сходимости знакоположительного ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак Коши.

## Признак Даламбера.

Если для знакоположительного числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует предел

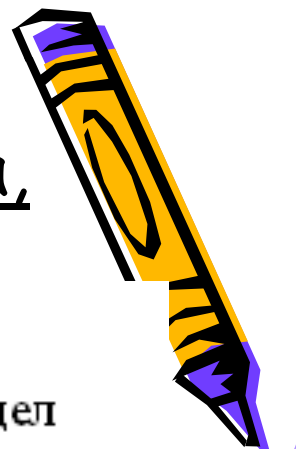
$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ то: } \begin{cases} \text{сходится} & \text{— при } C < 1 \\ \text{расходится} & \text{— при } C > 1 \\ \text{признак неприменим} & \text{— при } C = 1 \end{cases}$$

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n-1}$

$$a_{n+1} = e^{3(n+1)-1} = e^{3n+2} \rightarrow C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{3n+2}}{e^{3n-1}} = e^3 > 1 - \text{ ряд расходится.}$$

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 - \text{ ряд сходится.}$$



## Признак Коши.

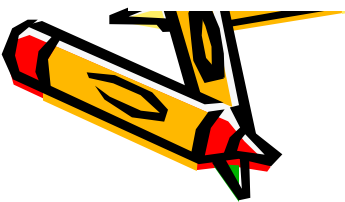
Если для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует предел,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ то: } \begin{cases} \text{сходится} & - \text{ при } C < 1 \\ \text{расходится} & - \text{ при } C > 1 \\ \text{признак неприменим} & - \text{ при } C = 1 \end{cases}$$

Замечание: признак Коши применяется в том случае, если общий член ряда содержит степень кратную  $n$ .

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$        $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$  - ряд сходится

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



## Интегральный признак Коши.

Если для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует несобственный

интеграл  $\int_c^{\infty} a_x dx$  (c-const), то:

{ ряд сходится, если несобственный интеграл сходится  
ряд расходится, если несобственный интеграл расходится (∞)  
признак неприменим, если интеграл не вычисляется

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – ряд Дирихле (p-const)

Если p = 1, то ряд Дирихле даёт гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходится

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Применим интегральный признак:

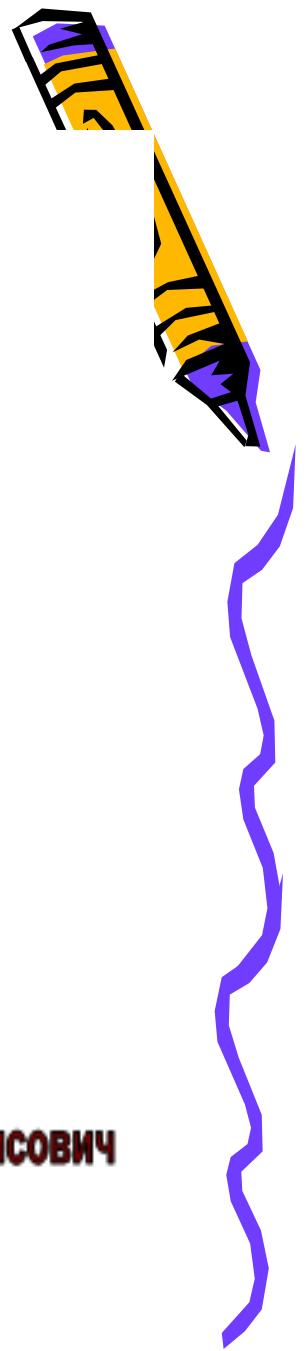
$$\int_c^{\infty} \frac{1}{n^p} dn = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_c^{\delta} n^{-p} dn = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{n^{-p+1}}{1-p} \Big|_c^{\delta} = \frac{1}{1-p} \lim_{\delta \rightarrow \infty} (b^{-p+1} - c^{-p+1}) = I$$

1 случай:  $p > 1 \rightarrow 1-p < 0 \rightarrow I = \frac{1}{1-p} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{1}{b^{\delta-1}}}_0 - c^{1-p} \right) = -\frac{c^{1-p}}{1-p} \neq \infty \rightarrow$

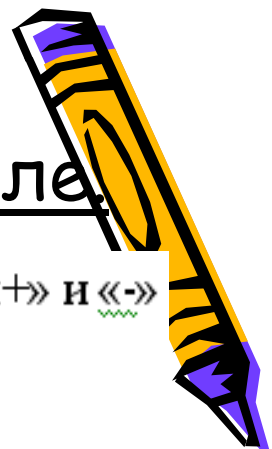
$I$  сходится,  $\rightarrow$  сходится ряд

2 случай:  $p < 1 \rightarrow 1-p > 0 \rightarrow I = \frac{1}{1-p} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left( \underbrace{b^{1-p}}_{\infty} - c^{1-p} \right) = \infty \rightarrow$

$I$  расходится,  $\rightarrow$  расходится ряд.



# Знакопеременный ряд. Признаки сходимости: Лейбница и Абеля-Дирихле



Определение: Знакопеременным называется такой ряд, у которого знаки «+» и «-» чередуются между собой.

Обозначения знакопеременных рядов:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  ( $a_n > 0$ ) - начинается со знака «+»
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n b_n$  ( $a_n, b_n > 0$ ) - начинается со знака минус

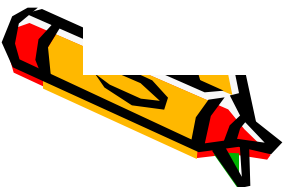
Признак Лейбница:

Если для знакопеременного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , ( $a_n > 0$ ) выполняются следующие

условия:

- 1)  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$  (монотонное убывание).
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (необходимый признак сходимости ряда), то ряд сходится.

Если одно из этих условий не выполняется, то ряд расходится.





Доказательство:

Иследуем 2 соседних чётные частные суммы

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Каждая из скобок согласно условию (1) положительная, значит  $S_{2n} > 0$

Туже частичную сумму представим в другом виде:  $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - a_{2n} \rightarrow S_{2n} < a_1$

(т.к. из положительного  $a_1$  вычитаются положительные числа).

$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \rightarrow S_{2n} < S_{2n+2} \rightarrow$  чётная частичная сумма представляет собой монотонную возрастающую и ограниченную сверху функцию, значит, по признаку Вейерштрасса, эта функция имеет предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ .

Вычислим нечётную частичную сумму:  $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 \leftarrow (\text{по 2-му условию}) = S$$

Вывод: Предел любой частичной суммы существует, значит, ряд расходится.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Определение: Знакопередающим ряд называется абсолютно сходящимся, если он сам сходится и сходится ряд, составленный из модулей.

Определение: Знакопередающим ряд называется условно сходящимся, если он сам сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

1)  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \rightarrow$  выполнено. 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow$  выполнено  $\rightarrow$  исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – гармонический ряд  $\rightarrow$  ряд из модулей расходится  $\rightarrow$  исходный ряд сходится условно.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





## Признак Абеля-Дирихле.

Если для знакочередующегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n b_n$  ( $a_n, b_n > 0$ ), выполняются следующие условия: 1)  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; 3) Частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - ограничена, то ряд сходится.

Замечание: Этот признак применяется в том случае, если общий член ряда имеет достаточно громоздкую структуру и разбивается на произведение 2-х частей  $a_n$  и  $b_n$ .

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{n^2}$

$$a_n = \frac{1}{n^2}; \quad b_n = \cos \pi n$$

1)  $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \dots \rightarrow$  выполняется;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \rightarrow$  выполняется;

2) Частная сумма ограничена т.к. косинус является ограниченной функцией  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n$ .

$\rightarrow$  исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \pi_n|}{n^2} \rightarrow \frac{|\cos \pi_n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2};$

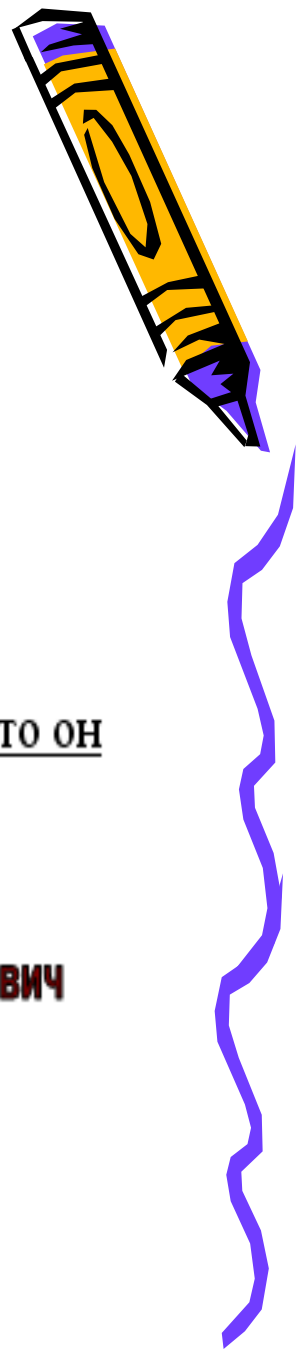
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - ряд Дирихле сходится.

По признаку сравнения сходится ряд, составленный из модулей  $\rightarrow$  исходный ряд сходится абсолютно.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



# Знакопеременный ряд. Достаточный признак его абсолютной сходимости.



Определение: знакопеременным называется такой ряд, у которого знаки (+) и (-) располагаются в произвольном порядке.

Достаточный признак абсолютной сходимости.

Если для знакопеременного ряда сходится ряд составленный из модулей, то он является абсолютно сходящимся.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) - \text{исходный ряд}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2) - \text{сходящийся по условию}$$

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда.

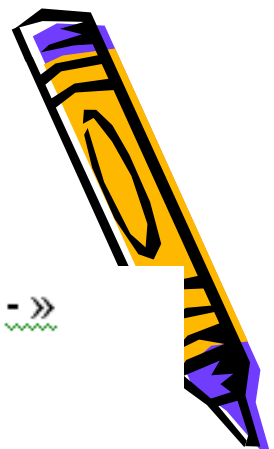
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(-)}| \quad (4)$$

Сумма (3) и (4) рядов даёт сходящийся ряд (2), значит по (3) свойству сходящихся рядов ряды (3) и (4) сходятся  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(3)} = S^{(3)}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(4)} = S^{(4)}$

Разность (3) и (4) ряда даёт (1) ряд, значит,  
 $S_n^{(1)} = S_n^{(3)} - S_n^{(4)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(3)} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(4)} = S^{(3)} - S^{(4)} = S^{(1)} \rightarrow$  конечное число,  
значит, (1) ряд сходится, причём абсолютно.



# Знакопеременный ряд, достаточный признак его условной сходимости.



Определение: Знакопеременным называется ряд, у которого знаки «+» и «-» располагаются в произвольном порядке.

## Достаточный признак условной сходимости

Если для знакопеременного ряда расходятся ряды, составленные отдельно из положительных и модулей отрицательных членов ряда, то ряд условно сходится.

Доказательство:

По определению условной сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) - исходный ряд сходится,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  (2) - расходится.

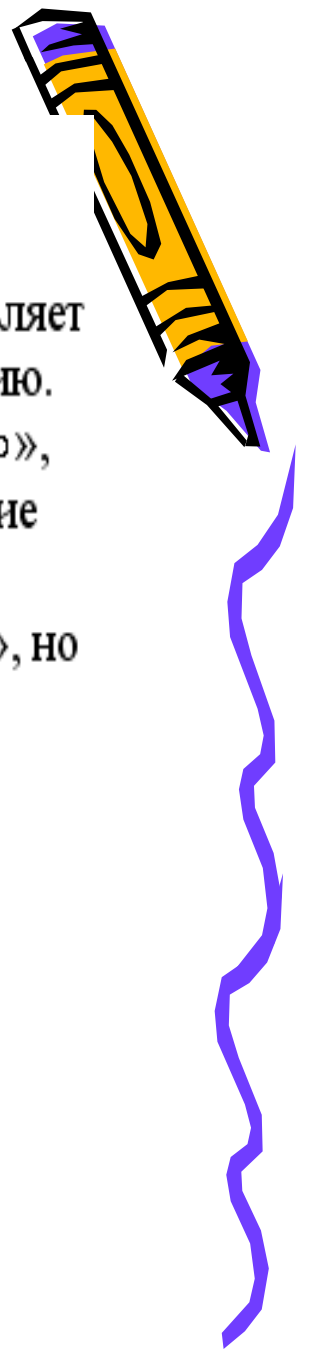
Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(-)}| \quad (4)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что:

- 1) (3) и (4) ряды сходятся, сумма этих рядов по третьему свойству сходящихся рядов должна дать сходящийся ряд, но сумма этих рядов составляет второй ряд, который расходится, получим противоречие условию.
- 2) Пусть (3) - сходится, (4) – расходится. Разность (3) и (4) ряда дает « $-\infty$ », но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.
- 3) Пусть (3) - расходится, (4) – сходится. Разность (3) и (4) ряда дает « $\infty$ », но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.

Вывод: Значит (3) и (4) ряды должны одновременно расходиться.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right)$  условно сходится.

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда

(3)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow$  расходится; (4)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \rightarrow$  расходится.

Для подтверждения расходимости рядов (3) и (4) используем интегральный признак Коши:

$\int_c^{\infty} \frac{1}{n \pm 1} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b \frac{1}{n \pm 1} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |n \pm 1| \Big|_c^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |b \pm 1| - \ln |c \pm 1|) = \infty$  - расходящийся интеграл.

Вывод: исходный ряд условно сходится.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

