Числовые ряды

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Числовой ряд и его сумма.

Определение: Числовым рядом называется сумма членов бесконечной числовой последовательности.

Определение: Общим членом ряда называется такое его слагаемое, для которого можно составить функцию его порядкового номера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots a_n=\frac{1}{n} \qquad a_n - \text{общий член}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{гармонический ряд}$$

Определение: Частичной суммой ряда называется сумма первых n членов этого ряда.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n \qquad (\forall n \in N)$$

Определение: Суммой ряда называется предел его частичной суммы $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Определение: Ряд называется сходящимся, если предел его любой частичной суммы существует и конечен.

Определение: Ряд называется расходящимся, если предел его частичной суммы не существует или бесконечен.

Ряд составленный из членов геометрической прогрессии (РГП).

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \ ,$$

где a_1 - 1-ый член ряда, q - знаменатель.

Составим частичную сумму: $S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} \quad (1)$

Умножим левую и правую части (1) на q: $qS_n = a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (2).$

Вычитаем (2) из (1) $\quad \rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \rightarrow S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Например:

Легенда: Изобретателю шахмат эмир пообещал любую награду. Изобретатель предложил эмиру на 1 клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую клетку в 2 раза больше и т.д.

$$n = 64 \quad a_1 = 1 \quad q = 2$$

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$$

Вычислим предел частичной суммы для исследования ряда на сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

1-й случай: $|q|<1$, пусть $q=\frac{1}{2} \to \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n}) = \frac{a_1}{1-q}$ – конечное число.

2-й случай: $|q|>1 \to \frac{a_1}{1-q}\lim(1-q^n)=\infty \to$ ряд расходится.

3-й случай: $q=1 \to S_n = \underbrace{a_1+\ldots+a_1}_{n-раз} = na_1$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na_1 = \infty \to$ ряд расходится.

4-й случай: $q=-1$ $\begin{array}{l} S_n = a_1 - a_1 + a_1 = a_1 \\ S_n = a_1 - a_1 = 0 \end{array}$

Предел от составленной частичной суммы не существует т.к. эта функция не одно-значна, а предел должен быть единственен.

Вывод: РГП – сходится, если $|q|<1 \to S=\frac{a_1}{1-q}$ и расходится, если $|q|\ge 1$.

Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.

Теорема: Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\forall n)$$

$$- \quad \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Замечание: Необходимый признак не является достаточным.

Замечание: Если предел $a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Гармонический ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (1) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \to$ необходимый признак выполняется.

$$\underset{(n\to\infty)}{S_n^{(n)}} = \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

Составим частичную сумму для вспомогательного ряда

$$S_n^{(2)} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}_{a_1^{(2)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{a_2^{(2)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{a_3^{(2)}}$$

$$S_1^{(2)} = 1+\frac{1}{2}\ ; \quad S_2^{(2)} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}+1\ ; \quad S_3^{(2)} = 1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2}\cdot 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\to S_n^{(2)} = 1+\frac{1}{2}\cdot n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right) = \infty \Rightarrow$ второй ряд расходится

Из сравнения видно, $S_n^{(1)} \rangle S_n^{(2)} \Rightarrow$ первый ряд больше второго, сумма второго ряда бесконечна $\Rightarrow$ сумма первого ряда бесконечна $\Rightarrow$ первый ряд расходится.

Вывод: Гармонический ряд является расходящимся.

Свойства сходящихся числовых рядов.

1-е свойство: Если числовой ряд сходится, то прибавление или вычитание конечного числа членов ряда не меняет его сходимость, а перестановка конечного числа членов ряда не меняет ни сходимость, ни сумму этого ряда.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{сходится} \to \lim_{n\to\infty} S_n = S; \quad S_n = \underbrace{a_1 + \ldots + a_k}_{S_k} + \underbrace{a_{k+1} + \ldots + a_n}_{S_{kn}}.$$

$$S_n = S_k + S_{kn} \to \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} S_{kn}; \quad S = S_k + \lim_{n\to\infty} S_{kn} \to \lim_{n\to\infty} S_{kn} = S - S_k = S^{(kn)} - \textit{конечное число.}$$

Частичная сумма S_{kn} соответствует ряду, полученному из исходного, если из него убрать первые k-слагаемые, этот ряд сходится, т.к. предел его частичной суммы конечное число. → сходимость не изменится, если из ряда вычесть конечное число членов этого ряда.

$$S = S_k + S^{(kn)} = S^{(kn)} + S_k \rightarrow$$

сумма ряда не изменится при перестановки конечного числа членов ряда.

Под $S^{(kn)}$ $и$ S_k скрываются суммы членов ряда, значит, от перестановки конечного числа членов ряда сумма и сходимость не меняются.

2-е свойство: Произведение сходящегося ряда на константу образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - сходится\ (1) \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n{}^{(1)} = S^{(1)};\ \ S_n{}^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n \quad c - const \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n \quad (2).$$

$$S_n{}^{(2)} = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots a_n) = cS_n{}^{(1)};\quad \lim_{n\to\infty} S_n{}^{(1)} = c\lim_{n\to\infty} S_n{}^{(1)} = cS^{(1)} = S^{(2)} - конечное\ число \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \quad S^{(2)} = c \cdot S^{(1)}$$

3-е свойство: Сумма двух сходящихся рядов образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится} \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)};\quad S_n^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится} \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(2)};\ S_n^{(2)} = b_1 + \ldots + b_n$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \rightarrow S_n^{(3)} = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(1)} + S^{(2)} = S^{(3)} - \text{конечное число} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) \rightarrow S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$$

Понятие знакоположительного ряда. Лемма о его сходимости.

Определение: Знакоположительным называется ряд, у которого все члены положительные.

Лемма: Для того, чтобы знакоположительный числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы частичная сумма была ограничена.

Доказательство:

Необходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится $(a_n > 0) \to \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Ряд знакоположительный $\to (S_n > 0, S > 0) \to S_n < S \to$

$\to S_n$ – ограниченная функция, т.к. удовлетворяет условию ограниченности: $|f(x)| < M > 0$

Достаточность: S_n – ограниченность $\Rightarrow S_n < S, S_1 < S_2 < S_3 \ldots <$ $\to$ частичная сумма представляет монотонно возрастающую и сверху ограниченную функцию $\to$ по признаку Вейерштрасса эта функция имеет предел

$\to \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \to$ ряд сходится.

Два признака сравнения для оценки сходимости знакоположительного ряда.

Признак сравнения:

Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ (1); $\sum_{n\to 1}^{\infty} b_n$ (2), начиная с некоторого номера k выполняется следующее условие: $a_n \le b_n \ (\forall n = k, \infty)$ (3), то:

1) Ряд (1) сходится при условии сходимости большего ряда (2).
2) Ряд (2) расходится при условии расходимости меньшего ряда (1).

Доказательство:

Составим из ряда (2) дополнительный ряд: $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ (4). Пусть 2-й ряд сходится, значит по 1-му свойству сходящихся рядов, будет сходиться и 4-й ряд. Составим из 1-го ряда дополнительный ряд: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (5). Из условия (3) следует, что $S_n^{(5)} \le S_n^{(4)}$.

Если 4-й ряд сходится, то по лемме его частная сумма ограничена

$S_n^{(4)} < S^{(4)} \to S_n^{(5)} < S^{(4)} \to S_n^{(5)}$ - ограниченная, значит, по лемме сходится 5-й ряд, значит, по 1-му свойству сходящихся рядов будет сходиться и 1-й ряд.

Пусть 1-й ряд расходится, значит: расходится и 5-й ряд, $\to S_n^{(5)} \to \infty$. Из условия (3) следует: $S_n^{(5)} < S_n^{(4)} \to S_n^{(4)} \to \infty$.

Вывод: Значит: 4-й и 2-й ряды расходятся.

Порядок исследования на сходимость по признаку сравнения.

1) Исследуемый ряд считаем рядом (1) и для него подбираем сходящийся ряд (2). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд сходится, в противном случае переход ко второму пункту.
2) Исследуемый ряд обозначаем как ряд (2) и для него подбираем расходящийся ряд (1). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд расходится. В противном случае переход к п.3.
3) Признак не применим, исходный ряд требуется исследовать по другим признакам.

Недостатки признака сравнения:

1) Требуется 1 или 2 дополнительных ряда с известными свойствами.
2) Требуется вычислять значения членов ряда для поиска такого номера (к), начиная с которого будет выполняться условие (3).

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = S^{(1)}$

$$S^{(1)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Сравним со сходящимся РГП: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

$S^{(1)} > S^{(2)} \rightarrow$условие (3) не выполняется, переходим к п.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = S^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \rightarrow$$

$S^{(1)} > S^{(3)} \rightarrow$ условие (3) выполняется и исходный ряд (1) расходится.

Предельный признак сравнения.

Если для 2-х знакоположительных рядов (1) и (2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0,\infty$, то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\to\frac{a_n}{b_n}\leq c\to a_n\leq cb_n$, пусть 2-й ряд сходится, тогда по 2-му свойству сходящихся рядов будет сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cb_n$, значит по признаку сравнения исходный ряд (1) сходится.

Порядок исследования на сходимость по предельному признаку:

1. Для исходного ряда подбирается сходящийся и вычисляется предел с. Если $c \neq 0, \infty$, то исходный ряд сходится, в противном случае п.2.
2. Для исходного ряда подбирается расходящийся ряд и вычисляется с. Если $c \neq 0, \infty$ то исходный ряд расходится, в противном случае п.3.
3. Признак не применим, необходимо использовать другой признак.

Недостаток этого признака:
Требуется 1 или 2 ряда с известными свойствами.

Пример: $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

Сравним со сходящимся РГП: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}{2^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n}$$

Используем 2-й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn}$

$c=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^{n}}=e^{\frac{1}{2}}\neq 0,\infty\to$ значит ряд исходный ряд сходится.

Признаки сходимости знакоположительного ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак Коши.

Признак Даламбера.

Если для знакоположительного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\text{, то: }\begin{cases}\text{сходится} & -\text{ при } C<1\\ \text{расходится} & -\text{ при } C>1\\ \text{признак неприменим} & -\text{ при } C=1\end{cases}$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n-1}$

$$a_{n+1}=e^{3(n+1)-1}=e^{3n+2}\to\quad C=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{3n+2}}{e^{3n-1}}=e^3>1-$$ ряд расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1-$$ ряд сходится.

Признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел,

$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ то: $\begin{cases} \text{сходится} & \text{– при } C<1 \\ \text{расходится} & \text{– при } C>1 \\ \text{признак неприменим} & \text{– при } C=1 \end{cases}$

Замечание: признак Коши применяется в том случае, если общий член ряда содержит степень кратную n.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ $\quad C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 -$ ряд сходится

Интегральный признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует несобственный интеграл $\int_c^{\infty} a_n dn$ (c-const), то:

$$\begin{cases} \text{ряд сходится, если несобственный интеграл сходится} \\ \text{ряд расходится, если несобственный интеграл расходится } (\infty) \\ \text{признак неприменим, если интеграл не вычисляется} \end{cases}$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – ряд Дирихле (p- const)

Если $p = 1$, то ряд Дирихле даёт гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

Применим интегральный признак:

$$\int_c^\infty \frac{1}{n^p}dn = \lim_{b\to\infty}\int_c^b n^{-p}dn = \lim_{b\to\infty}\frac{n^{-p+1}}{1-p}\Big|_c^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{-p+1}-c^{-p+1}) = I$$

1 случай: $p>1 \to 1-p<0 \to I = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{b^{p-1}}}_{0} - c^{1-p}) = -\frac{c^{1-p}}{1-p} \neq \infty \to$

I сходится, $\to$ сходится ряд

2 случай: $p<1 \to 1-p>0 \to I = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(\underbrace{b^{1-p}}_{\infty} - c^{1-p}) = \infty \to$

I расходится, $\to$ расходится ряд.

Знакочередующийся ряд. Признаки сходимости: Лейбница и Абеля-Дирихле

Определение: Знакочередующимся называется такой ряд, у которого знаки «+» и «-» чередуются между собой.

Обозначения знакочередующихся рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad (a_n > 0)$ - начинается со знака «+»
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n b_n \quad (a_n, b_n > 0)$ – *начинается со знака минус*

Признак Лейбница:

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $(a_n > 0)$ выполняются следующие условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (монотонное убывание).

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости ряда), то ряд сходится.

Если одно из этих условий не выполняется, то ряд расходится.

Доказательство:

Исследуем 2 соседних чётные частные суммы

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

Каждая из скобок согласно условию (1) положительная, значит $S_{2n} > 0$

Туже частичную сумму представим в другом виде: $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - a_{2n} \rightarrow S_{2n} < a_1$ (т.к. из положительного a_1 вычитаются положительные числа).

$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \rightarrow S_{2n} < S_{2n+2} \rightarrow$ чётная частичная сумма представляет собой монотонную возрастающую и ограниченную сверху функцию, значит, по признаку Вейерштрасса, эта функция имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Вычислим нечётную частичную сумму: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 \leftarrow (\textit{по } 2-\textit{му условию}) = S$

Вывод: Предел любой частичной суммы существует, значит, ряд расходится.

Определение: Знакочередующимся рад называется абсолютно сходящимся, если он сам сходится и сходится ряд, составленный из модулей.

Определение: Знакочередующимся рад называется условно сходящимся, если он сам сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots\rightarrow$ выполнено. 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\rightarrow$ выполнено $\rightarrow$ исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд $\rightarrow$ ряд из модулей расходится $\rightarrow$ исходный ряд сходится условно.

Признак Абеля-Дирихле.

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n b_n \quad (a_n, b_n > 0)$, выполняются следующие условия: 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 3) Частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ограничена, то ряд сходится.

Замечание: Этот признак применяется в том случае, если общий член ряда имеет достаточно громоздкую структуру и разбивается на произведение 2-х частей a_n и b_n.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos \pi n}{n^2}$

$a_n = \frac{1}{n^2};\ b_n = \cos \pi n$

1) $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots \rightarrow$ выполняется; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \rightarrow$ выполняется;

2) Частная сумма ограничена т.к. косинус является ограниченной функцией $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n$.

$\rightarrow$ исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \pi_n|}{n^2} \rightarrow \frac{|\cos \pi_n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2};$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - ряд Дирихле сходится.

По признаку сравнения сходится ряд, составленный из модулей $\rightarrow$ исходный ряд сходится абсолютно.

Знакопеременный ряд. Достаточный признак его абсолютной сходимости.

Определение: знакопеременным называется такой ряд, у которого знаки (+) и (–) располагаются в произвольном порядке.

Достаточный признак абсолютной сходимости.

Если для знакопеременного ряда сходится ряд составленный из модулей, то он является абсолютно сходящимся.

Доказательство:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) - исходный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) – сходящийся по условию

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(-)}|$ (4)

Сумма (3) и (4) рядов даёт сходящийся ряд (2), значит по (3) свойству сходящихся рядов ряды (3) и (4) сходится $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(3)} = S^{(3)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(4)} = S^{(4)}$

Разность (3) и (4) ряда даёт (1) ряд, значит,

$S_n^{(1)} = S_n^{(3)} - S_n^{(4)} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(3)} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(4)} = S^{(3)} - S^{(4)} = S^{(1)} \rightarrow$ конечное число, значит, (1) ряд сходится, причём абсолютно.

Знакопеременный ряд, достаточный признак его условной сходимости.

Определение: Знакоперменным называется ряд, у которого знаки «+» и « - » располагаются в произвольном порядке.

Достаточный признак условной сходимости.

Если для знакопеременного ряда расходятся ряды, составленные отдельно из положительных и модулей отрицательных членов ряда, то ряд условно сходится.

Доказательство:

По определению условной сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) - исходный ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) - расходится.

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)} \quad (3) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(-)}\right| \quad (4)$$

Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что:

1) (3) и (4) ряды сходятся, сумма этих рядов по третьему свойству сходящихся рядов должна дать сходящийся ряд, но сумма этих рядов составляет второй ряд, который расходится, получим противоречие условию.

2) Пусть (3) - сходится, (4) – расходится. Разность (3) и (4) ряда дает «$-\infty$», но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.

3) Пусть (3) - расходится, (4) – сходится. Разность (3) и (4) ряда дает «∞», но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.

Вывод: Значит (3) и (4) ряды должны одновременно расходиться.

Пример: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)$ условно сходится.

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\rightarrow$расходится; (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\rightarrow$расходится.

Для подтверждения расходимости рядов (3) и (4) используем интегральный признак Коши:

$\int_{c}^{\infty}\frac{1}{n\pm1}dn=\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}\frac{1}{n\pm1}dn=\lim_{b\to\infty}\ln\,|n\pm1|\,\Big|_{c}^{b}=\lim_{b\to\infty}(\ln\,|b\pm1|-\ln\,|c\pm1|)=\infty$ - расходящийся интеграл.

Вывод: исходный ряд условно сходится.