ВВЕДЕНИЕ в математический анализ 3 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Два замечательных предела.

Сравнение бесконечно малых функций.

Основные теоремы об эквивалентности б.м. функциях.

Понятие односторонних пределов и непрерывности функций.

Свойства непрерывных функций.

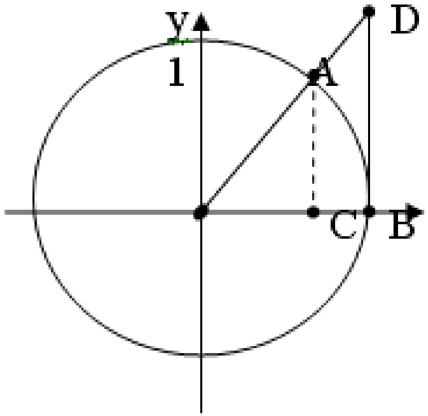
Точки разрыва и их классификация.

Два замечательных предела.

1. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Доказательство:

Рассмотрим окружность единичного радиуса:



$$S_1=S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot AC=\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2};\ S_2=S_{OAB}=\frac{1}{2}OA^2x=\frac{x}{2}$$

$$S_3=S_{\Delta ODB}=\frac{1}{2}OB\cdot DB=\frac{x}{2}OBtgx=\frac{1}{2}tgx;\ S_1<S_2<S_3;$$

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}tgx\,|:\frac{1}{2}\sin x;\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\to\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u(x)}<\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)}<\underbrace{1}_{v(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\cos x=1;\ \lim_{x\to 0}v(x)=\lim_{x\to 0}1=1\to$$

по второму признаку существования предела $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0};\ \dfrac{\sin x}{x}=1.$

2. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad (1)$

Получим из формулы (1) различные разновидности записи второго замечательного предела:

замена: $y=\frac{1}{x};\ x=\frac{1}{y};\ y\to 0 \qquad \to \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e \quad (2).$

Вычислим натуральный логарифм от левой и правой части:

$$\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln e \qquad \to \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1 \quad (3)$$

Из формул (1) - (3) получим ещё более общие формулы:

$$\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{kx}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}\right)^{k}=\left(\text{замена}: x=yk; y\to\infty\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn} \quad (4);\quad \lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{n}{y}}=e^{kn} \quad (5);\quad \lim_{y\to 0}\frac{n\ln(1+ky)}{y}=kn \quad (6).$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Определение: Две б.м. называются б.м. одного порядка малости, если предел их отношения существует и $\neq 0$, $\neq \infty$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0, \neq \infty$$

Определение: Две б.м. называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Определение: α называется б.м. более высокого порядка малости по сравнению с β,

если: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$

Это сравнение обозначается: $\alpha = 0(\beta)$

Определение: α называется б.м. более низкого порядка малости по сравнению с β,

если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$

Это сравнение обозначается: $\beta = 0(\alpha)$

Основные теоремы об эквивалентности б.м. функциях.

Теорема 1: Если две б.м. порознь эквивалентны третьей б.м., то они эквивалентны между собой.

Доказательство:

$$\alpha \sim \gamma;\ \beta \sim \gamma \rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\gamma} \lim_{x \to x_0} \frac{\gamma}{\beta} = 1 \rightarrow \alpha \sim \beta$$

Теорема 2: Разность двух эквивалентных б.м. является б.м. более высокого порядка малости по сравнению с каждой из исходных б.м.. $\alpha \sim \beta$.

Доказательство:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \to x_0} 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0 \rightarrow \alpha - \beta = 0(\alpha)$$

Теорема 3: Предел отношения двух б.м. не изменится, если их заменить на соответствующие им эквивалентные б.м..

Доказательство:

$$\alpha \sim \alpha_1;\ \beta \sim \beta_1 \rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{x}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1}{\beta} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Пары эквивалентных б.м. в т. $x=0$.

1. $\sin x \sim x$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (1 замечательные предел)

2. $tgx = x$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$

3. $\arcsin x \sim x$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(Замена = x=\sin y; y\to 0\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin\sin y}{\sin y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=1$

4. $arctgx \sim x$

5. $\ln(1+x)\sim x;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (2 замечательные предел)

Теорема 4: Сумма конечного числа б.м. эквивалентна б.м. самого низкого порядка малости, если такая б.м. в сумме единственно.

Доказательство:

$S=\alpha+\beta+\ldots+\gamma$, α - б.м. самого низкого порядка малости - называется главной частью суммы б.м., остальные: $\beta=0(\alpha)\ldots\ \gamma=0(\alpha)\ \to\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=0\ldots\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\alpha}=0\ \beta_1$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{S}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta+\ldots+\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}1+\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}}_{0}+\ldots+\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\alpha}}_{0}=1\to S\sim\alpha$$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)+tg^3x-\arcsin x^3}{x^2+\sin^4 2x+arctg7x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2=\left(\lim\frac{x}{x}\right)^2=1$

Понятие односторонних пределов и непрерывности функций.

Определение: Число А называется пределом функции слева (левосторонний предел), если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение: правосторонний предел, если: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение: Число А называется пределом функции в самой точке, если оба односторонних предела равны между собой.

Понятия непрерывной функции:

1. Определение: функция $f(x)$ называется непрерывной в т. x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для получения второго понятие непрерывности, представим правую часть, т.е. константу $f(x_0)$ через предел от этой константы:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0); \qquad \lim_{[x - x_0] \to 0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0$$

Обозначим: $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – превращение функции,

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента.

Тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

2. Определение: Функция называется непрерывной в точке, если предел приращения функции в этой точке равен нулю при устремлении к нулю приращения аргумента.

Свойства непрерывных функций.

1. Непрерывность в точке.

1.1. Сумма, произведения и частное непрерывных функций является непрерывной функцией, если функция знаменателя не равна нулю.

Доказательство:

Пусть $f_1(x), f_2(x)$ - непрерывные функции $\rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \rightarrow$ при $x = x_0$ функция сумма примет значение: $f(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f_1(x) + f_2(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = f(x_0)$$

$\rightarrow f(x) -$ непрерывна в т. x_0.

1.2. Обратная функция составленная из непрерывных функций является непрерывной функцией.

1.3. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, является непрерывной функцией.

1.4. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Доказательство:

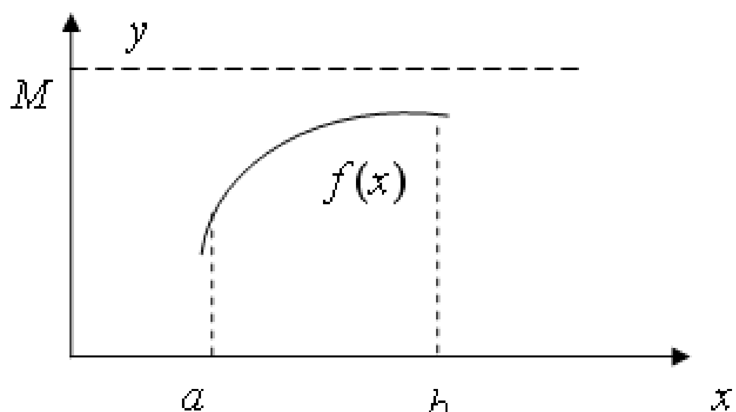
$$y = a^x;\quad \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right);$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right) = a^x(1-1) = 0 \to a^x$ - непрерывная функция по второму определению непрерывности.

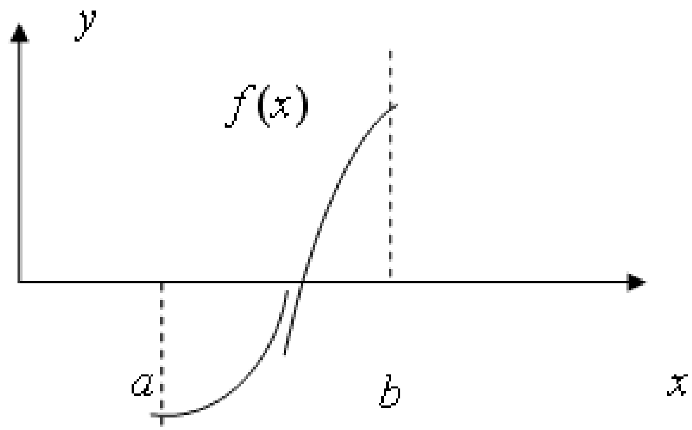
2. Непрерывность на отрезке.

Определение: функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

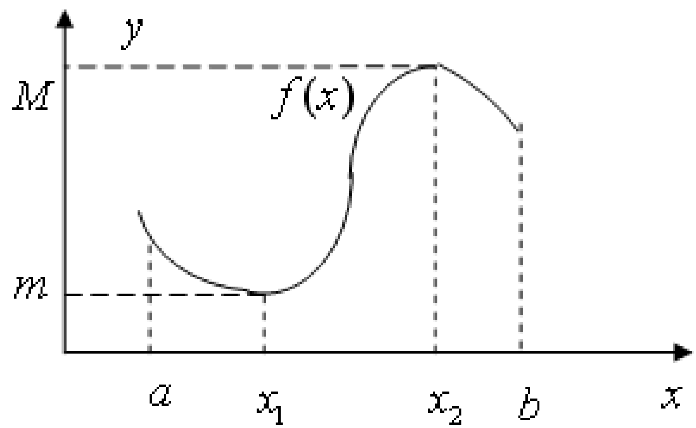
2.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она является ограниченной функцией на этом отрезке.



2.2. Если функция непрерывна на отрезке и на концах этого отрезка принимаем различные по знаку значения, то внутри отрезка найдётся хотя бы одна, в которой функция равна нулю.



2.3. Если m, M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на $[a,b]$, то $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых выполняются неравенства: $f(x_1) = m; \quad f(x_2) = M$.



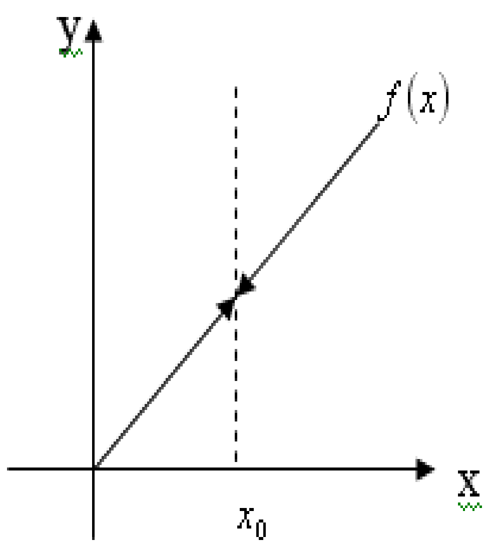
Точки разрыва и их классификация.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва (т.р.), если в этой точке не выполняется условие непрерывности, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

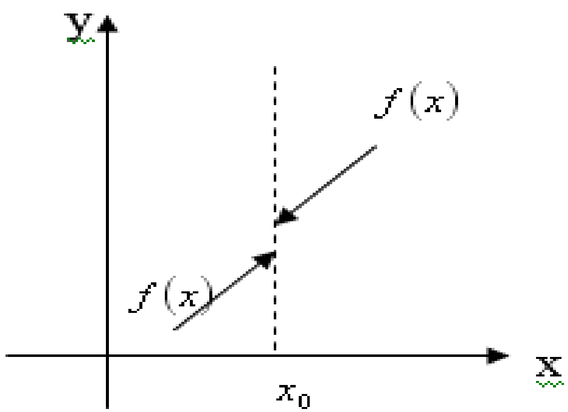
Классификация точек разрыва:

1. Устранимая т.р. первого рода, если выполняется следующие условия:

$$\lim_{x\to x-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} \neq f(x_0)$$



2. Т.р. первого рода типа скачка, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$



3. Т.р. второго рода, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$