

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com



Понятие двойного интеграла и его свойства.

Понятие двукратного интеграла.

Свойства двукратного интеграла.

Вычисление двойного интеграла.

Замена переменных в двойном интеграле, вычисление в полярной системе координат.

Вычисление объёма тела через двойной интеграл.

Вычисление площади плоской фигуры через двойной интеграл.

Понятие тройного интеграла и его свойства.

Трёхкратный интеграл и его свойства, вычисление тройного интеграла.

Замена переменных в тройном интеграле.

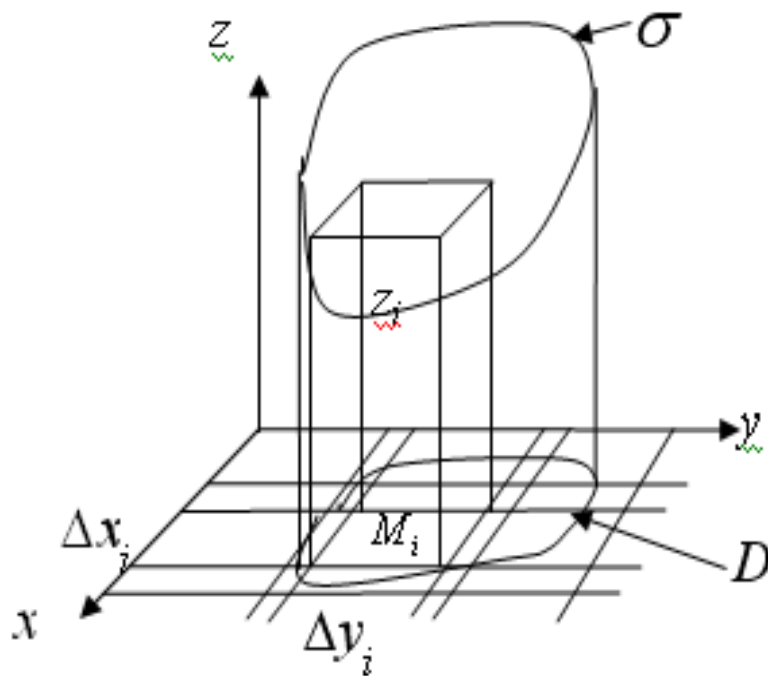
Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.

Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.



Понятие двойного интеграла и его свойства.

Задача нахождения объёма тел.



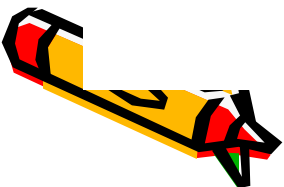
Дано: цилиндрическое тело:
верхнее основание
поверхность

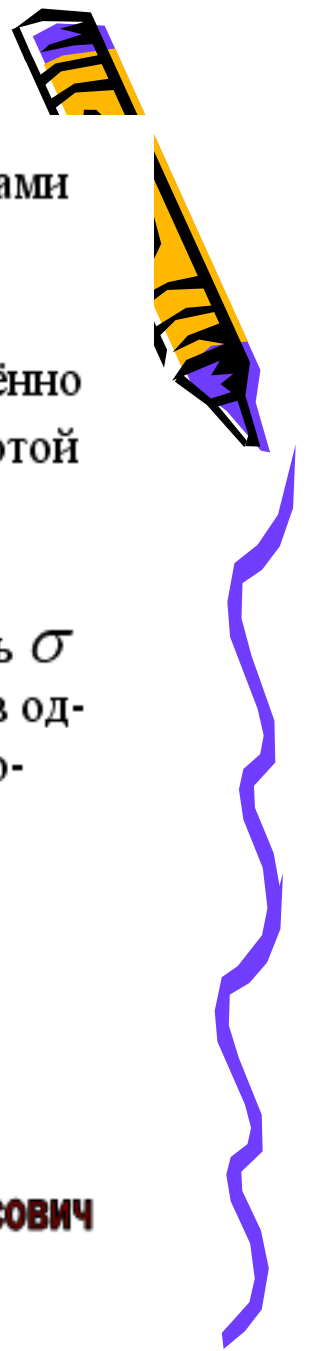
$\sigma : z = f(x, y)$, нижнее основание
плоскость $D = \text{Пр}_{xy} \sigma$, боковая
поверхность параллельна оси z .

Найти: объем тела: V

Решение: Область D
разбивается на n частей,
прямыми, параллельными осям
 x, y .

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Каждая часть будет представлять собой прямоугольник со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_i$. Площадь каждой части $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Внутри каждой части выбирается произвольная точка $M_i(x_i, y_i)$ и вычисляется значение z_i выбранной точки, то есть $f(x_i, y_i)$. Объём каждой части тела приближённо заменяем на объём параллелепипеда с площадью основания ΔS_i и высотой $z_i = f(x_i, y_i)$.

$$V_i \approx \Delta S_i f(x_i, y_i)$$

Замечание: Приближённое равенство объясняется тем, что поверхность σ совпадает с верхним основанием параллелепипеда только в одной точке и площадь ΔS_i на границе области D больше площади, которая относится к нижнему основанию тела.

$$\text{Объём всего тела } V = \sum_{i=1}^n V_i \rightarrow V \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i. \quad (1)$$

Точное значение объёма тела получим в пределе $V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$





Определение: Двойным интегралом называется предел интегральной суммы (1) если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение двойного интеграла:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Свойства двойного интеграла:

1. Константу можно выносить за знак двойного интеграла

$$\iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$$

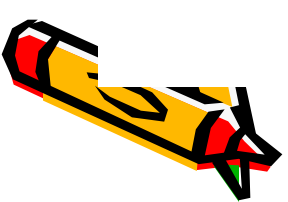
2. Двойной интеграл от суммы двух функций равен сумме двойных интегралов от каждой из этих функций.

$$\iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy + \iint_D f_2(x, y) dx dy$$

2. Если $D = D_1 + D_2$, то двойной интеграл по всей области равен сумме двойных интегралов по каждой из этих частей.

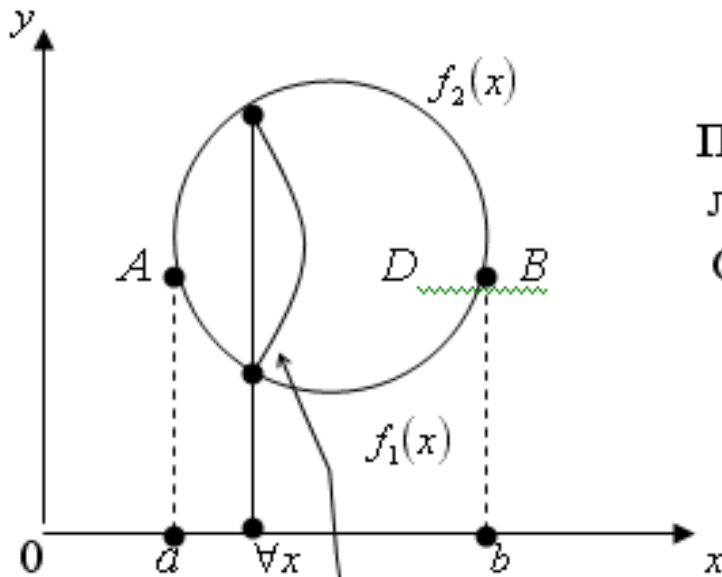
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Понятие двукратного интеграла.

Определение: Область называется правильной, если любая прямая, проведённая через любую внутреннюю точку области, пересекает границу области только в 2-х точках.



Дано:

Правильная область D , образованная линиями: $x = a$, $x = b$; $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$.

Область D является областью определения
Функции 2-х переменных: $z = f(x, y)$

отрезок интегрирования.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Решение:

Выберем $\forall x \in [a, b]$ ($x - const$). В этом случае функция 2-х переменных $f(x, y)$ превращается в функцию 1-го переменного y , от которой можно вычислить определённый интеграл на отрезке $[f_1(x), f_2(x)]$ (границы это отрезка числа, т.к. функции при заданном значении аргумента принимают числовые значения).

$$\Phi(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \quad (1)$$

Полученную функцию $\Phi(x)$, как функцию одного аргумента x можно интегрировать на отрезке $[a, b]$:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx \quad (2)$$

Подставляем (1) в (2):

$$I_D = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx - \text{двукратный интеграл.}$$

Определение: Интеграл (1) называется внутренним, интеграл (2) – внешним.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Порядок вычисления двукратного интеграла.

1. Вычисляется внутренний интеграл, при этом переменная x считается константой
2. От полученного выражения вычисляется внешний интеграл.

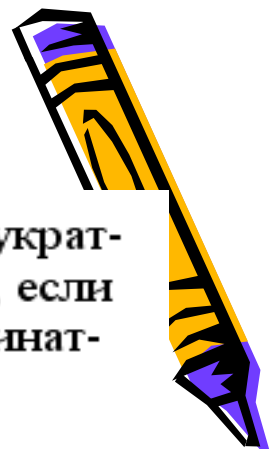
Пример:

$$\begin{aligned} I_D &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^{x^2} dy + \int_0^{x^2} y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Свойства двукратного интеграла.



1 свойство: Двукратный интеграл по всей области D равен сумме двукратных интегралов по областям D_1, D_2 , которые получаются, если разбить область D прямой параллельной одной из координатных осей, т.е.: $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$.

Доказательство:

1 случай: Область D разбивается на части прямой параллельной оси y .

$$I_D = \int_a^e \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

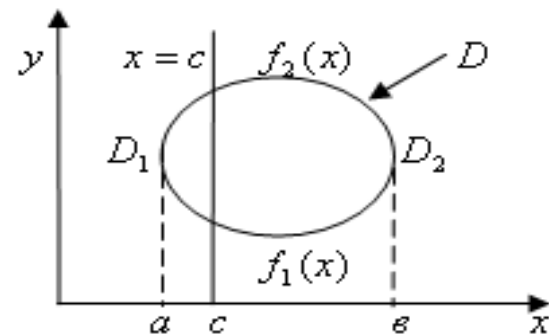
$$D_1 : x = a, x = c; \quad y = f_1(x), y = f_2(x)$$

$$D_2 : x = c, x = e; \quad y = f_1(x), y = f_2(x)$$

В двукратном интеграле (1) отрезок $[a, e]$ разобьём на две части $[a, c]$ и $[c, e]$, и

внешний интеграл представляем в виде суммы двух интегралов.

$$I_D = \int_a^c \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx + \int_c^e \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx = I_{D_1} + I_{D_2}, \text{ ч.т.д.}$$



© 2011, Фёдоров Павел Борисович





2 случай: Область D разбивается на части прямой параллельной оси x.

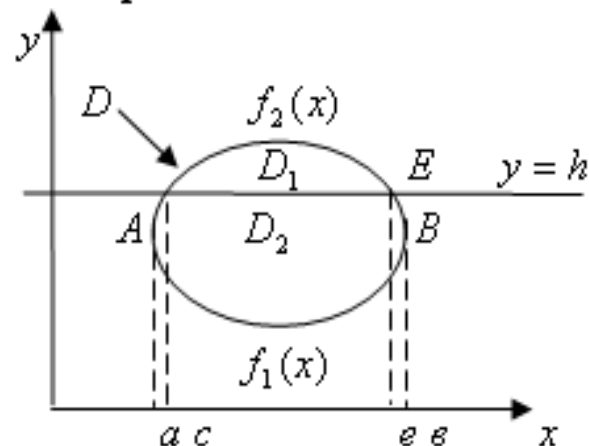
$$D_1: x=c, x=e; y=h, y=f_2(x)$$

$$ACEB: \psi(x) = \begin{cases} f_2(x), x \in [a, c] \\ h, x \in [c, e] \\ f_2(x), x \in [e, e] \end{cases}$$

$$D_2: x=a, x=e; y=f_1(x), y=\psi(x)$$

Отрезок $[f_1(x), f_2(x)]$ разобьём на две части $[f_1(x), \psi(x)]$ и $[\psi(x), f_2(x)]$, и внутренний

интеграл в двукратном интеграле (1) разобьём на сумму двух интегралов.



$$I_D = \underbrace{\int_a^e \int_{f_1(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx}_{I_{D2}} + \int_a^e \int_{\psi(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Разобьём отрезок $[a, e]$ на три части $[a, c]$, $[c, e]$, $[e, e]$ и внешний интеграл на сумму трёх интегралов.

$$I_D = I_{D2} + \underbrace{\int_a^c \int_{a \frac{1}{2}(x) - f_2(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx}_0 + \underbrace{\int_c^e \int_{c \frac{1}{2}(x) - h}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx}_{I_{D1}} + \underbrace{\int_e^e \int_{e \frac{1}{2}(x) - f_2(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx}_0 = I_{D2} + I_{D1}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Замечание: Первый и третий интегралы равны нулю, т.к. у внутреннего интеграла верхние и нижние пределы равны

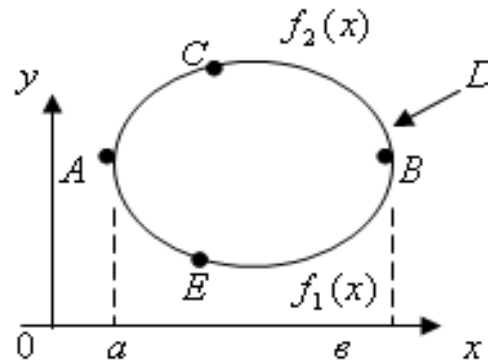
2 свойство: Если для функции $f(x,y)$ в области D площадью S m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значения этой функции, то двукратный интеграл лежит в следующих пределах $mS \leq I_D \leq MS$ (3).

Доказательство:

По свойству определённого интеграла внутренний интеграл для двукратного интеграла (1) лежит в следующих пределах

$$m \cdot \underbrace{[f_2(x) - f_1(x)]}_{\text{длина отрезка интегрирования}} \leq \Phi(x) \leq M \cdot \underbrace{[f_2(x) - f_1(x)]}_{\text{длина отрезка интегрирования}} \quad (2)$$

Подставляем вместо внутреннего интеграла неравенство (2) в интеграл (1).



© 2011, Фёдоров Павел Борисович



$$I_D \leq \int_a^e M(f_2(x) - f_1(x))dx = M \int_a^e (f_2(x) - f_1(x))dx \rightarrow$$

$$I_D \leq M \left[\int_a^e f_2(x)dx + \int_a^e f_1(x)dx \right] = M [S_{ACB} - S_{AEB}] = M \cdot S$$

3 свойство: Если функция $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области D площадью S , то $\exists M(x,y) \in D$ двукратный интеграл вычисляется по формуле $I_D = f(x,y) \cdot S$.

Доказательство:

Если функция непрерывна в области D , то она обязательно имеет в этой области наименьшее и наибольшее значение:

$$m \leq f(x,y) \leq M \quad (x,y \in D) \quad (4)$$

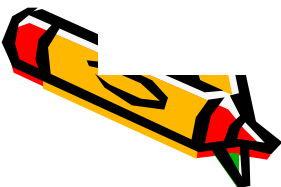
Разделим все части неравенства (3) на площадь S .

$$m \leq \frac{I_D}{S} \leq M \quad (5)$$

Левая и правая части неравенства (4,5) равны, значит всегда можно подобрать такие $x,y \in D$, при которых будут совпадать и средние части этих неравенств:

$$f(x,y) = \frac{I_D}{S} \rightarrow I_D = f(x,y)S$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Вычисление двойного интеграла.

Теорема: Двойной интеграл от функции $f(x)$ по правильной области D равен двукратному интегралу, вычисленному от той же функции по той же области.

Доказательство:

Разобьём область D прямыми, параллельными координатным осям на n частей площадью $\Delta S_i = \Delta x_i \times \Delta y_i$. Для каждой части вычислим двукратный интеграл, используя 3-е свойство:

$$I_{D_i} = f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

Двукратный интеграл по всей области D вычислим, используя 1-е

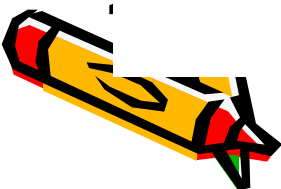
свойство: $I_D = \sum_{i=1}^n I_{D_i}$.

Вычислим пределы левой и правой частей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{D_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i; \quad I_D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

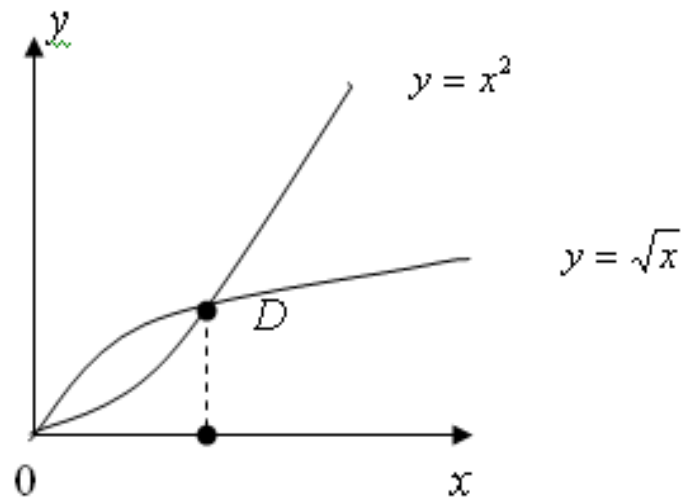
Предел правой части по определению является двойным интегралом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{a f_1(x)}^{b f_2(x)} \int f(x, y) dy dx$$



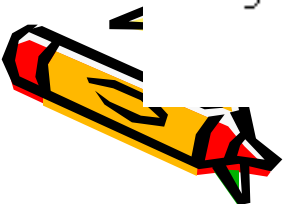


Пример: $\iint_D (x+y) dx dy = I$; $D: y = x^2, x = y^2$.



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y) dy dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = 0,3. \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Замена переменных в двойном интеграле, вычисление в полярной системе координат.

Замена переменных осуществляется по формуле Остроградского

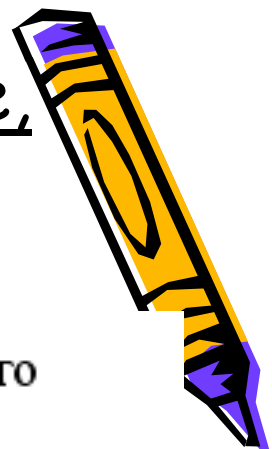
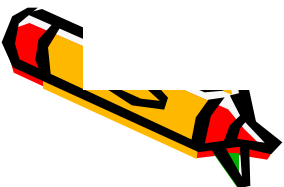
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(x^*,y^*) |I| du dv,$$

где D^* – это та же по форме область D , но заданная линиями в новой системе координат u, v , x^*, y^* – функции связи старой и новой системы координат $x = x^*(u, v)$, $y = y^*(u, v)$

I – Якобиан:
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial u} & \frac{\partial x^*}{\partial v} \\ \frac{\partial y^*}{\partial u} & \frac{\partial y^*}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Определение: Якобианом называется определитель, составленный из частных производных первого порядка.

Замечание: Порядок Якобиана определяется числом аргументом функции.



Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

$$x = r \cos \varphi = x^*, \quad y = r \sin \varphi = y^*, \quad u = \varphi, v = r$$

$$\rightarrow I = \begin{vmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi = -r$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Замечание: Полярная система координат применяется, если область D - круг или часть его.

Пример:

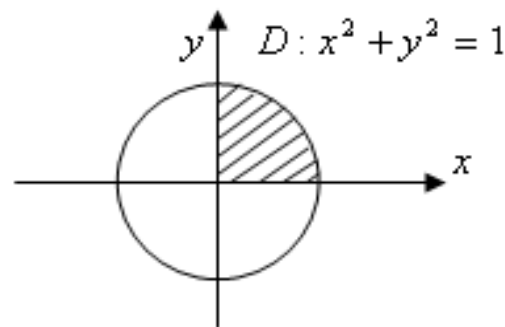
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{D^*} e^{-r^2} r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r e^{-r^2} dr d\varphi = I$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{Замена: } t = -r^2; dt = -2r dr \Rightarrow dr = -\frac{dt}{2r}$$

$$t_x = 0 \quad t_e = -1$$



© 2011, Фёдоров Павел Борисович

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-1} r e^t \frac{dt}{-2r} d\phi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-1} e^t dt d\phi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \Big|_0^{-1} d\phi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-1} - 1) d\phi = 2(1 - \frac{1}{e}) \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(e-1)}{e}.$$

Обобщенная полярная система координат

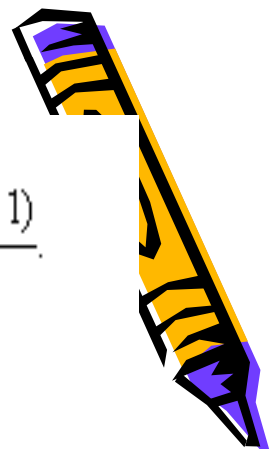
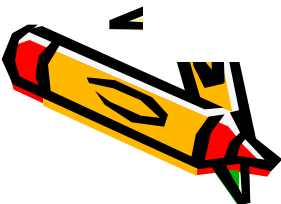
Замечание: Обобщенная полярная система координат применяется, если область D - эллипс или часть его.

$$x = ar \cos \phi = x^*, \quad y = br \sin \phi = y^*, \quad u = \phi, v = r$$

$$\rightarrow I = \begin{vmatrix} -ar \sin \phi & a \cos \phi \\ br \cos \phi & b \sin \phi \end{vmatrix} = -abr \sin^2 \phi - abr \cos^2 \phi = -abr$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_{D^*} f(ar \cos \phi, br \sin \phi) r d\phi dr$$

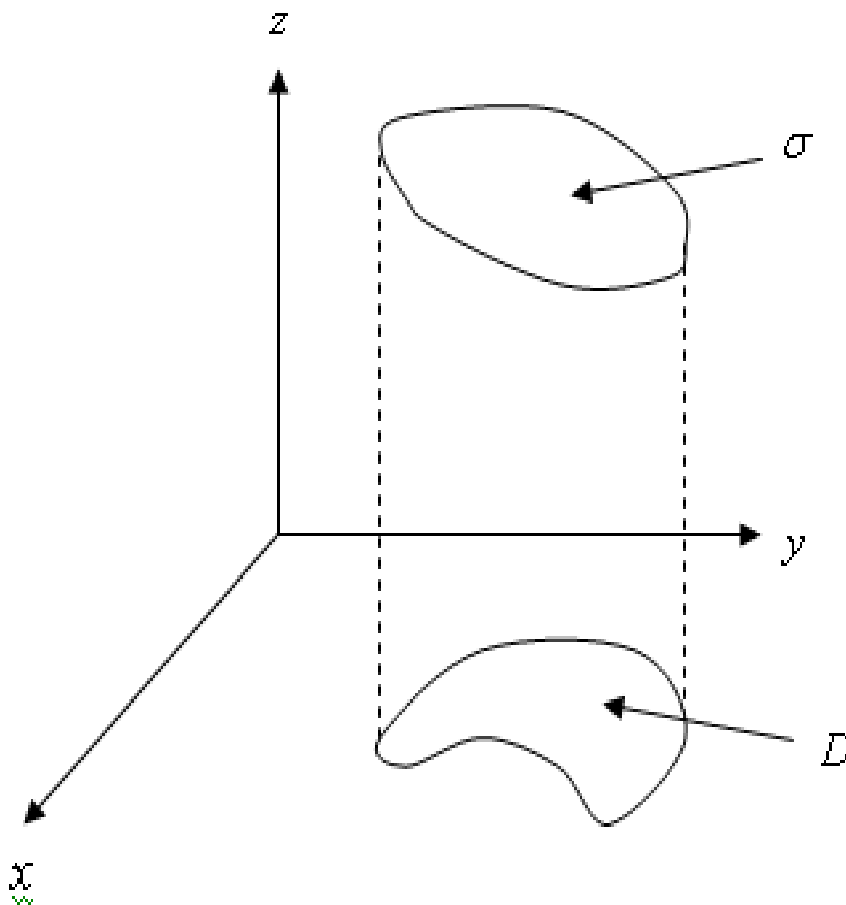
© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Вычисление объёма тела через двойной интеграл.



1 случай: Цилиндрическое тело.

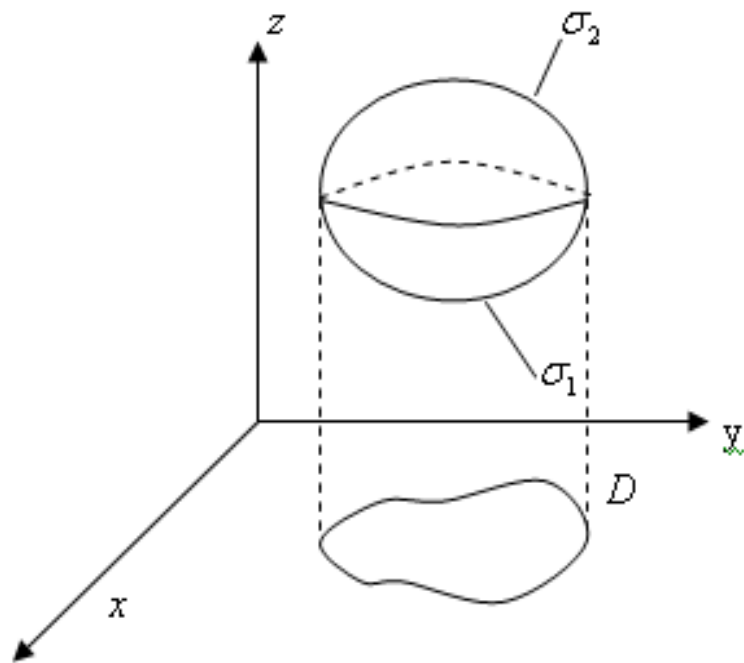


$$\sigma: z = f(x, y)$$

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$



2 случай: Тело, образованное пересечением 2-х поверхностей.



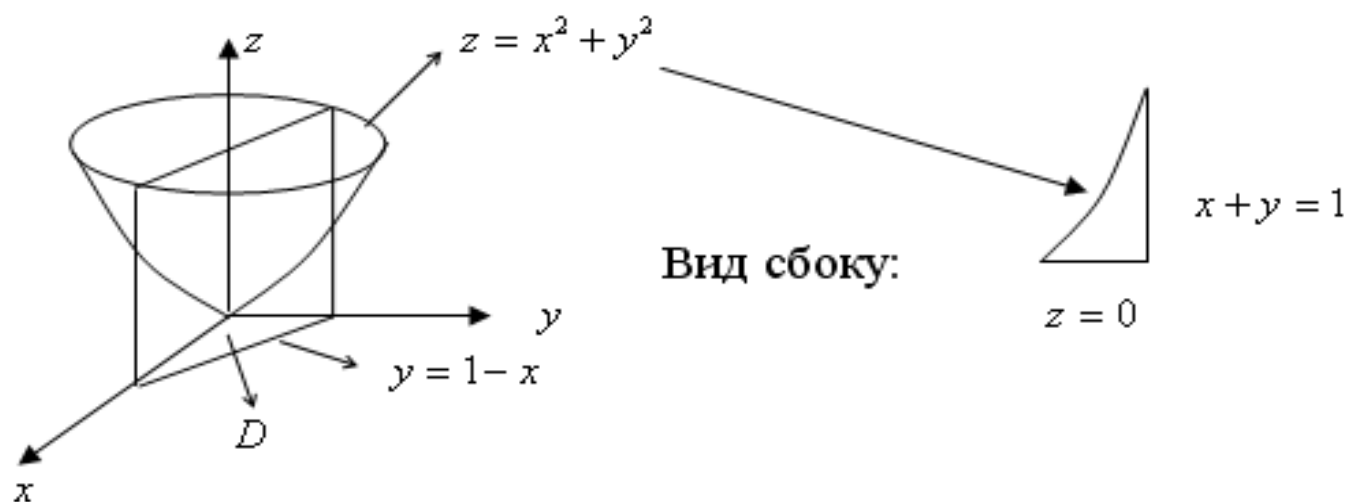
$$\begin{aligned} \sigma_2: z &= f_2(x, y); \\ \sigma_1: z &= f_1(x, y); \end{aligned} \quad V = V_2 - V_1, \quad V = \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy,$$
$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: Найти объём: $V: z = x^2 + y^2, z = 0, x + y = 1$.



Решение:

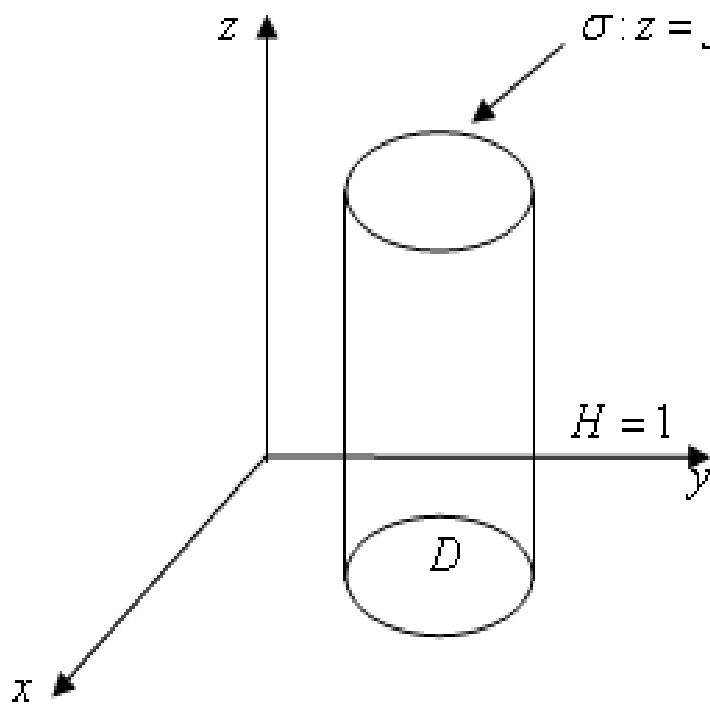
$$\begin{aligned} V &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^2 - 3x^3 + (1-x)^3) dx = \frac{1}{3} \left(x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{(1-x)^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



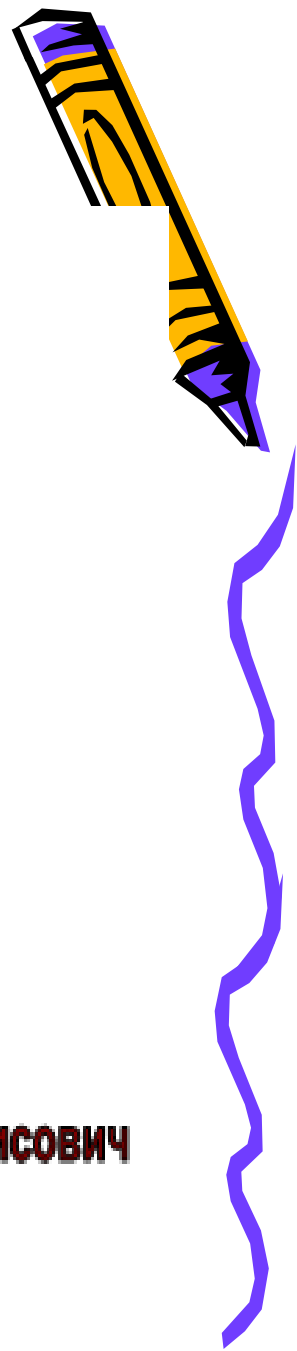
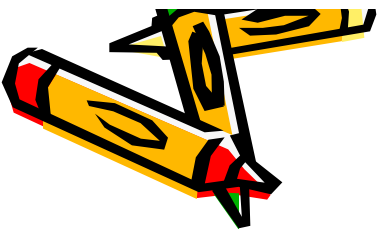
Вычисление площади плоской фигуры через двойной интеграл.

Рассмотрим прямой цилиндр единичной высоты

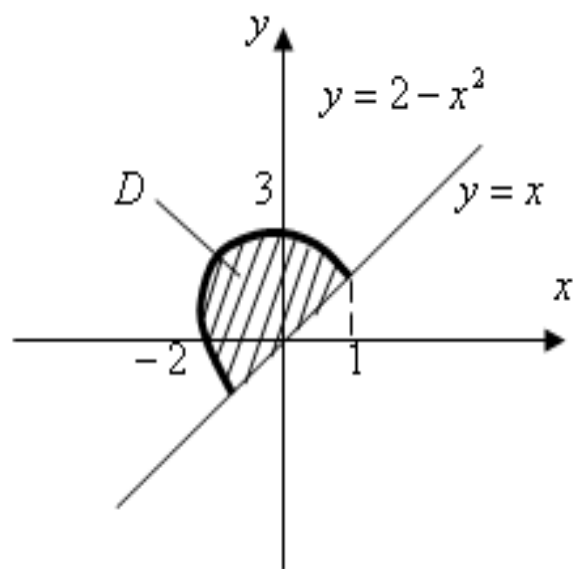


$$\begin{aligned} V &= SH \rightarrow V = S \\ V &= S = \iint_D \underbrace{f(x, y)}_1 dx dy \rightarrow \\ &\rightarrow S = \iint_D dx dy \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример: $D: y = 2 - x^2; y = x$



$$2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

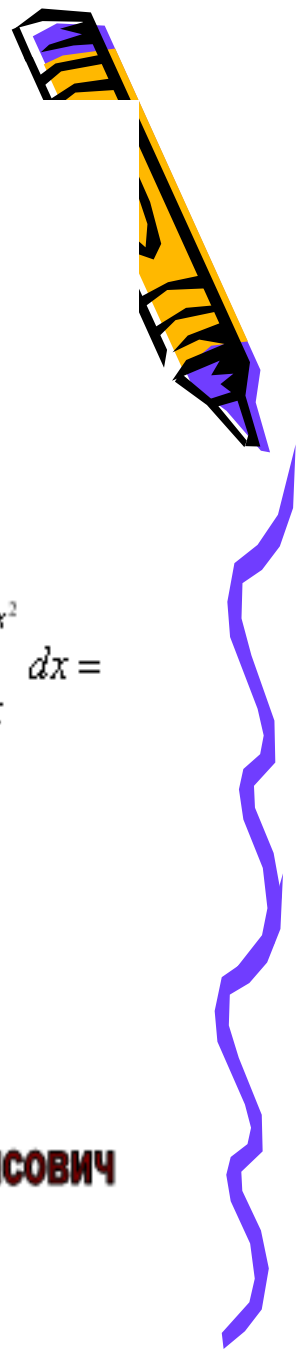
$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$S = \iint_D (dx dy) = \int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} dy dx = \int_{-2}^1 y \Big|_x^{2-x^2} dx =$$
$$= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx$$

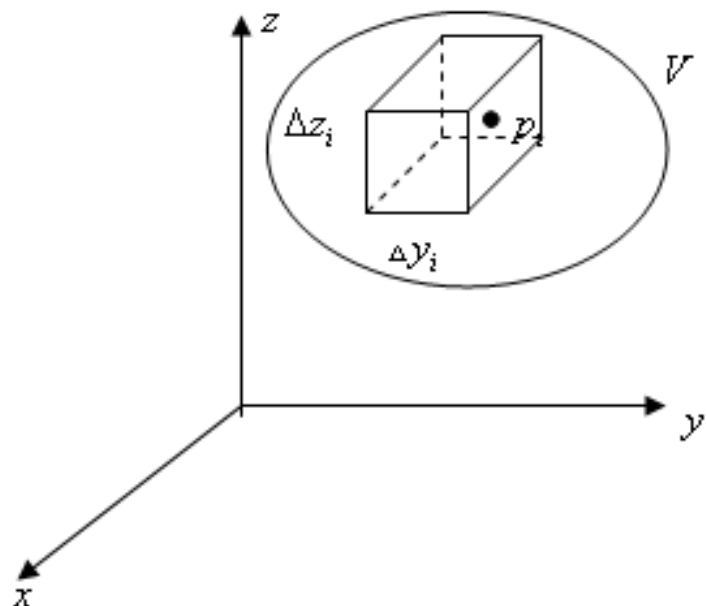
$$\left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 4,5 \text{ M}^2$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Понятие тройного интеграла и его свойства.

Задача на нахождение массы тела.

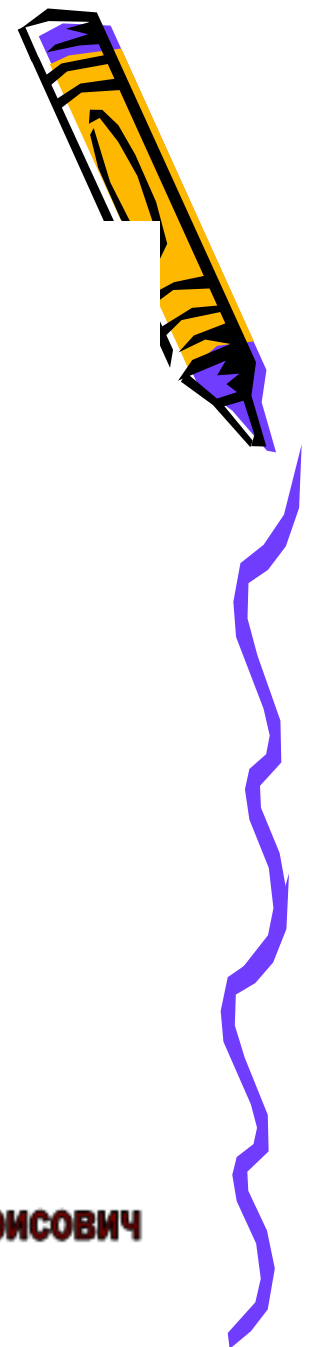


Дано: тело V , в каждой точке которого задана объёмная плотность

$$\text{материала } f(x, y, z) \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$$

Требуется определить массу: M .

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Решение:

Область V разобьём на n - частей объёмом ΔV_i плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Заменяем объём каждой части на объём параллелепипеда со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$:

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Внутри каждой части выбирается произвольная точка $P_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение функции плотности в этой точке $f(x_i, y_i, z_i)$ и предположим, что плотность во всех точках этой части одинакова и равна плотности выбранной точке.

Масса каждой части: $m_i \approx f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Масса всего тела: $M \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ (1).

Точное значение массы получим в пределе: $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$

Определение: Тройным интегралом называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения области на части и выбора точки внутри каждой части.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Обозначение тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Приложения тройного интеграла

1. Масса тела: $M = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$
2. Объем тела: $V = \iiint_V dx dy dz$

Свойства тройного интеграла:

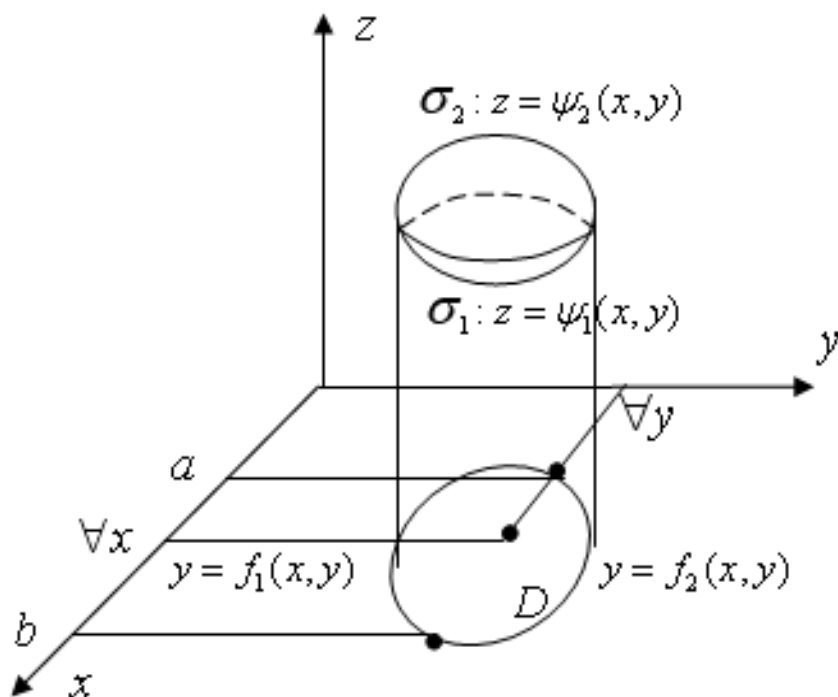
1. $\iiint_V c f(x, y, z) dx dy dz = c \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$
2. $\iiint_V [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f_1(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V f_2(x, y, z) dx dy dz .$
3. Если $V = V_1 + V_2$, то $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz$



Трёхкратный интеграл и его свойства, вычисление тройного интеграла.



Определение: Область V называется правильной, если любая прямая проведённая через любую внутреннюю точку в области пересекает границу области только в двух точках и область D так же является правильной областью.



Дано: правильная область V ,

$$D = \text{Пр}_{xy} V$$

Выберем $\forall x, y \in D$, тогда функция трёх переменных $f(x, y, z)$ станет функцией одного переменного z , от которой можно вычислить определённый интеграл на отрезке: $[\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$

$$\Phi(x, y) = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





От функции двух переменных можно вычислить двойной интеграл:

$$I_V = \iint_D \Phi(xy) dx dy$$

От двойного интеграла можно вычислить двукратный

Окончательно получим: $I_V = \int_{a f_1(x) w_1(xy)}^{b f_2(x) w_2(xy)} \int f(x, y, z) dz dy dx$ – трёхкратный интеграл.

Свойства трёхкратного интеграла.

1. Если область V разбить на части плоскостью параллельной какой-то координатной плоскости, то $I_V = I_{V_1} + I_{V_2}$
2. Если функция в области объёмом V имеет наименьшее m и наибольшее M , то $mV \leq I_V \leq MV$
3. Если функция в области объёмом V является непрерывной, то $I_V = \int f(x, y, z) \cdot V$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Вычисление тройного интеграла.

Теорема: Тройной интеграл от непрерывной $f(x, y, z)$ по правильной области V равен трёхкратному интегралу, вычисленному от той же функции по той же области.

Доказательство:

Разобьём область V на n частей плоскостями параллельными координатным. Для каждой части вычислим трёхкратный интеграл, используя третье свойство $I_{V_i} = f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Трёхкратный интеграл по всей области вычисляем используя первое свойство:

$$I_V = \sum_{i=1}^n I_{V_i}$$

Вычислим предел левой и правой частей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad I_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i - \text{тройной интеграл}$$

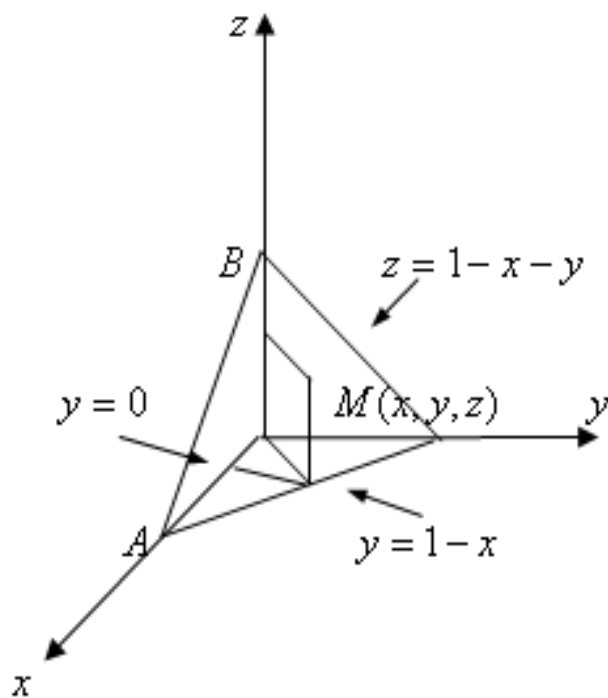
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^e \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx .$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: Найти массу тела $V: x+y+z=1$ ($x=0, y=0, z=0$). Если плотность пропорциональна квадрату расстояния от любой точки тела до оси z .



$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 f(x, y, z) &= kr^2 = k(x^2 + y^2) \\
 M &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \int_0^{1-x-y} k(x^2 + y^2) dz dy dx = \\
 &= k \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) z \Big|_0^{1-x-y} dy dx = \\
 &= k \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2)(1-x-y) dy dx = \\
 &= k \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 - x^3 - x^2 y + y^2 - xy^2 - y^3) dy dx = \\
 &= k \int_0^1 \left(x^2 y - x^3 y - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{1-x} dx =
 \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





$$\begin{aligned} &= k \int_0^1 (x^2(1-x) - x^3(1-x) - \frac{x^2}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{x}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4) dx = \\ &= k \left[\int_0^1 (x^2 - x^3 - x^3 + x^4 - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x}{3} + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{3}) dx + \frac{1}{3} \frac{(1-x)^4}{-4} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \frac{(1-x)^5}{-5} \Big|_0^1 \right] = \\ &= k \left[\int_0^1 (\frac{5}{6}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{3}) dx + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} \right] = k \left(\frac{5}{6} \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{30} = \\ &= k \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \right] = \frac{k}{30}. \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Замена переменных в тройном интеграле.

Осуществляется по формулам Остроградского:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x^*, y^*, z^*) |I| dU dV dW,$$

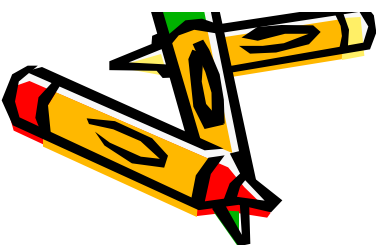
где V^* - это та же по форме область V , но заданная в новой системе координат U, V, W .

$$\left. \begin{aligned} x &= x^*(U, V, W) \\ y &= y^*(U, V, W) \\ z &= z^*(U, V, W) \end{aligned} \right\} \text{ - функции связи между старой и новой системы координат.}$$

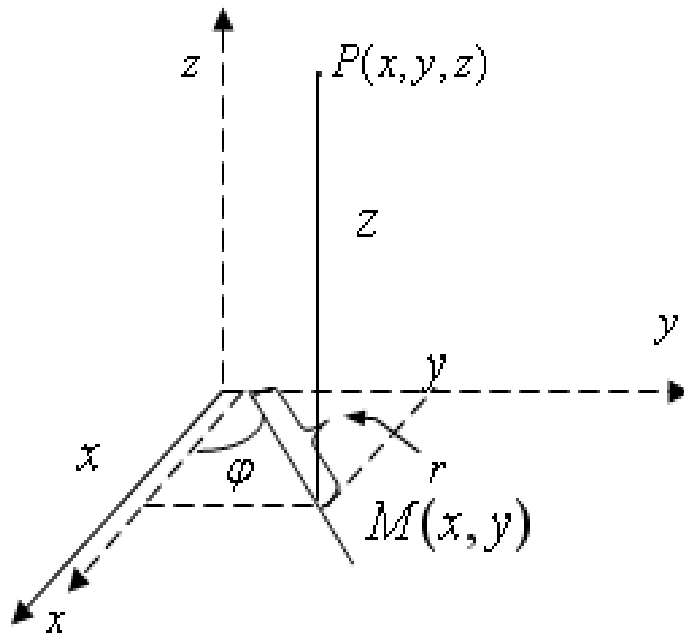
I - Якобиан:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial U} & \frac{\partial x^*}{\partial V} & \frac{\partial x^*}{\partial W} \\ \frac{\partial y^*}{\partial U} & \frac{\partial y^*}{\partial V} & \frac{\partial y^*}{\partial W} \\ \frac{\partial z^*}{\partial U} & \frac{\partial z^*}{\partial V} & \frac{\partial z^*}{\partial W} \end{vmatrix}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.



r – полярный радиус

$$x = r \cos \varphi = x^*$$

$$y = r \sin \varphi = y^*$$

$$z^* = z$$

$$U = \varphi \quad V = r \quad W = z$$

$$I = \begin{vmatrix} r \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi = -r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

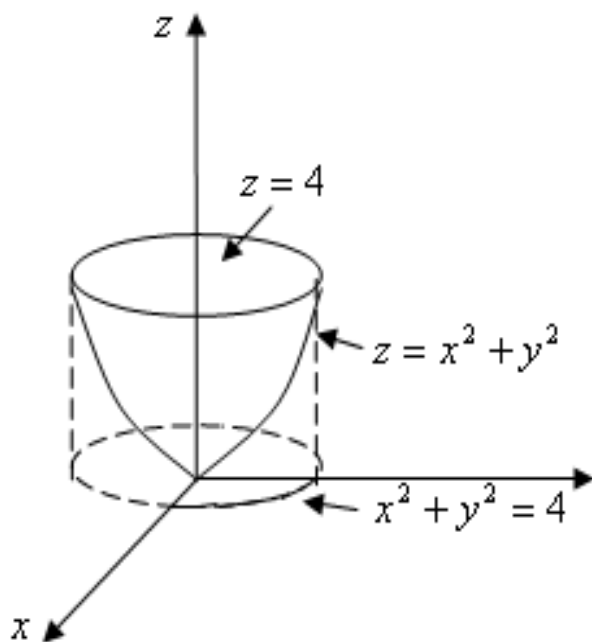
© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Замечание: Цилиндрическая система координат применяется, если проекция области V на плоскость xOy – круг или часть его.

Пример: Найти объём тела $V: z = x^2 + y^2; z = 4$



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V^*} r d\varphi r dr dz = \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{x^2+y^2-r^2}^4 r dz dr d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z \Big|_{r^2}^4 dr d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} (8 - 4) d\varphi = 16\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

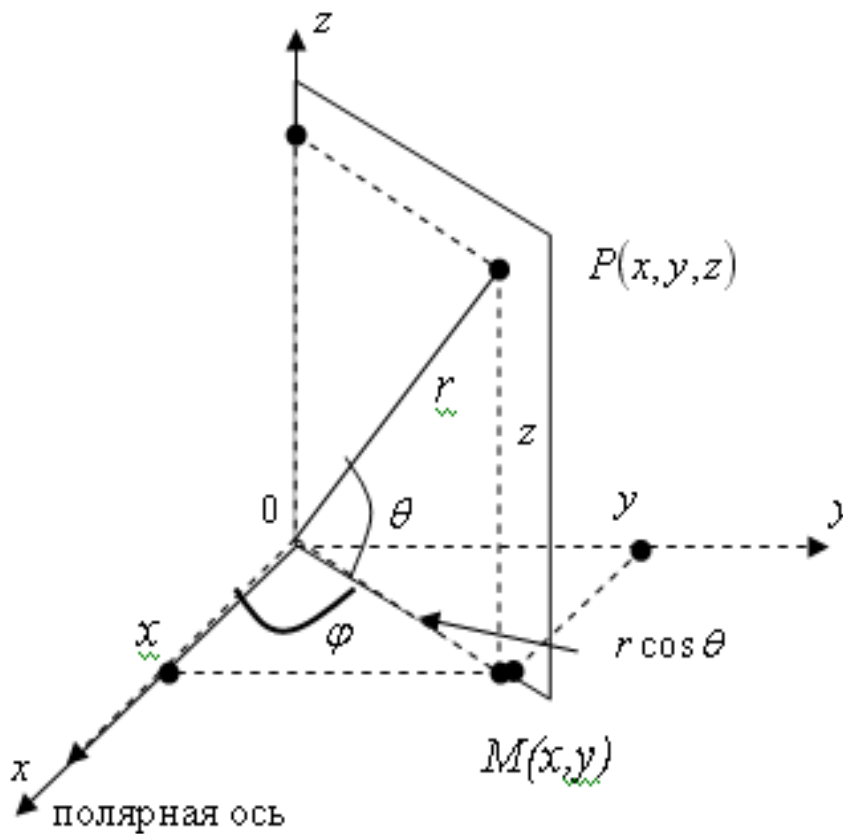
© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.



$$\begin{aligned}z &= r \sin \theta = z^* \\OM &= r \cos \theta \\x &= r \cos \phi \cos \theta = x^* \\y &= r \sin \phi \cos \theta = y^* \\U &= \phi, V = r, W = \theta\end{aligned}$$





$$\begin{aligned} I &= \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = -\sin \theta \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \end{vmatrix} + \\ &+ r \cos \theta \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = -\sin \theta r \cos \theta (-r \sin \theta) \underbrace{\begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}}_{-1} + r \cos \theta r \cos \theta \cos \theta \underbrace{\begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}}_{-1} = \\ &= -r^2 \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -r^2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos \theta d\varphi dr d\theta$$

Замечание: Сферическая система координат применяется, если область V - шар или часть его.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

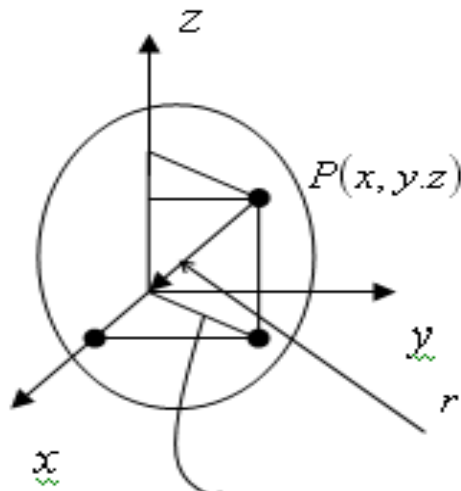




Пример: Найти массу $1/8$ шара радиуса R , если плотность пропорциональна расстоянию от любой точки тела до начала координат.

Плотность: $f(x, y, z) = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \\ &= r^2 [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta] = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}M &= \iiint_V k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = k \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cos \theta d\theta dr d\phi = \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin \theta \Big|_0^{2\pi} dr d\phi = k \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R d\phi = \frac{kR^4}{4} \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{k\pi R^4}{8}\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

