Криволинейные интегралы 2 рода

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

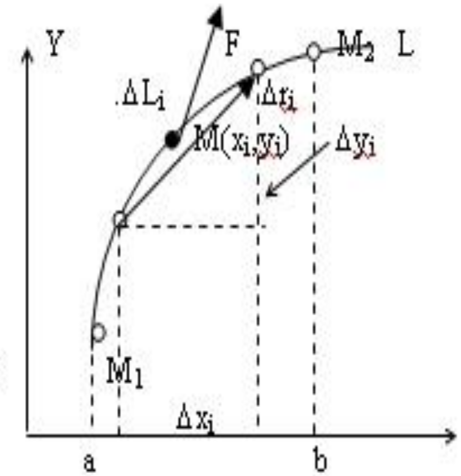
Понятие криволинейного интеграла 2 рода (Линейные интегралы) и его свойства .

Вычисление криволинейного интеграла 2 рода в декартовой и полярной системах координат,

а также в параметрической форме.

Понятие криволинейного интеграла 2 рода и его свойства.

(для задачи нахождение работы по передвижению материальной точки)



Дано: дуга L, к каждой точке которой приложена сила F, меняющаяся и по величине и по направлению, т.е. являющейся функцией координат x,y.

Найти: Работу по передвижению материальной точки $M(x_i,y_i)$ от M_1 к M_2

Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i, выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$ и построим на каждой части вектор Δr_i.

Работа на каждом участке ΔL_i вычисляется через скалярное произведение силы на путь: $A_i \approx (F(x_i,y_i) \times \Delta r_i)$. Приближенное равенство засчет того, что положение силы зафисикровано в выбранной точке $M(x_i,y_i)$ и криволинейный путь по дуге ΔL_i заменен на прямолинейный путь по вектору Δr_i.

Работа по передвижению материальной точки $M(x_i,y_i)$ от M_1 к M_2:

$A_i \approx \sum(F(x_i,y_i) \times \Delta r_i)$ (1) Переходя к пределу, получим точное значение работы:

$$\mathbf{A = \lim_{n\to\infty} \sum(f(x_i,y_i) \times \Delta r_i).}$$

Определение: Криволинейным интегралом 2 рода или **линейным интегралом** называется предел интегральной суммы (1), если это предел не зависит от способа разбиение на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение: $A = \int_L \mathbf{(F(x,y),dr) = \lim_{n\to\infty} \sum(F(x_i,y_i) \times \Delta r_i)}$. **(2)**

Формула (2) является сокращенным обозначением линейного интеграла.

Представим вектор в координатной форме: $F(x,y) = X(x,y)\,\mathbf{i} + Y(x,y)\,\mathbf{j}$ (3), где координаты $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ являются функциями двух координат x,y. Вектор Δr_i в координатной форме имеет следующий вид: $\Delta r_i = \Delta x_i\,\mathbf{i} + \Delta y_i\,\mathbf{j}$ (4).

Вычислим скалярные произведения в левой и правой частях (2) как сумму произведений соответствующих координат векторов (3) и (4): $\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \lim_{n\to\infty} \sum[X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,\Delta y_i]}$. **(5)**

Формула (5) является развернутым обозначением линейного интеграла.

Свойства

1. Постоянный множитель можно выносить за знак линейного интеграла: $\int\limits_L C\,(F(x,y),dr) = C\int\limits_L (F(x,y),dr)$

2. Линейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой их этих функций:
$$\int\limits_L \{F_1(x,y)+F_2(x,y)\},dr) = \int\limits_L (F_1(x,y),dr)+\int\limits_L (F_2(x,y),dr)$$

3. Дугу можно разбивать на отдельные части и линейный интеграл по всей дуге равен сумме интегралов по каждой их этих частей:
$$\int\limits_L (F(x,y),dr)=\int\limits_{L_1} (F(x,y),dr)+\int\limits_{L_2} (F(x,y),dr)$$

Определение: Циркуляцией вектора называется линейный интеграла по замкнутому контуру.

Циркуляция вектора обозначается: $\oint (F(x,y),dr.$

Замечание: Положительным направлением считается движение точки по дуге против часовой стрелки.

4. При смене направления движения линейный интеграл меняет знак.

Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

1. В декартовой системе координат.

Дано: L: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$. (смотри рисунок предыдущего вопроса)

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \lim_{n\to\infty} \sum [X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,\Delta y_i]. \quad (5)$$

Для формулы (5) используем теорему Лагранжа: $\Delta y_i = y'(x_i)\,\Delta x_i$

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \lim_{n\to\infty} \sum [X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,y'(x_i)\,\Delta x_i] = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum [X(x_i,y_i) + Y(x_i,y_i)\,y'(x_i)]\,\Delta x_i}_{\text{Определенный интеграл на отрезке } [a,b].}.$$

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int_a^b [X(x,y(x)) + Y(x,y(x))\,y'(x)]\,dx \quad (8)$$

Замечание: вместо **y** подставляется уравнение линии L: $y(x)$.

2. В параметрической форме.

В параметрической форме производная $y'(x)$ вычисляется по формуле: $y'(x) = y'(t) / x'(t)$, дифференциал $dx = x'(t)\,dt$ и, как при замене переменных, меняются пределы интегрирования $a = x(t_н)$, $b = x(t_к)$.

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int_{t_н}^{t_к} [X(x(t),y(t)) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) / x'(t)]\;x'(t)\,dt$$

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int_{t_н}^{t_к} [X(x(t),y(t))\;x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t)]\;dt \quad (9)$$

Замечание: вместо **y** подставляется параметрические уравнения линии L: $y(t)$ и $x(t)$.

3. В полярной системе координат.

Связь полярной и декартовой систем координат записывается в виде: $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, где $r = r(\varphi)$. Тогда x и y можно рассматривать как параметрическое задание функции $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ с параметром φ.

$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $\qquad$ $y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$.

Подставляя $x'(\varphi)$ и $y'(\varphi)$ в (9), получим (с заменой буквы t на букву φ):

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int_{\varphi_К}^{\varphi_В} [X(x(t),y(t))\,\{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\} + Y(x(t),y(t))\,\{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\}]\,dt \quad (10)$$

Замечание: **$r(\varphi)$** - уравнение линии L.

Приложение циркуляции для вычисления площади плоской фигуры.

Дано: Плоская фигура – область D, ограниченная линией L, которая образована функциями $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке [a,b].

Найти: Площадь плоской фигуры – S.

Решение: Площадь плоской фигуры – S через определенный интеграл вычисляется по формуле:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

Интеграл S_2 соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла

$\rightarrow S_2 = -\int_{AMB} y\,dx$ (минус засчет движения по AMB по часовой стрелки)

Интеграл S_1 также соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла

$\rightarrow S_1 = \int_{ANB} y\,dx$

Тогда площадь плоской фигуры $S = S_2 - S_1 = -\int_{AMB} y\,dx - \int_{ANB} y\,dx$. Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D.

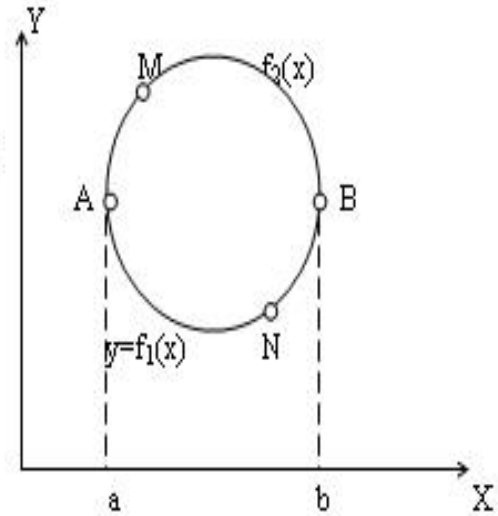
Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L и площадь плоской фигуры будет вычисляться по формуле: $S = -\oint_L y\,dx$ (11)

Аналогично можно составить площадь по направлению **y** через циркуляцию по линии L по формуле: $S = \oint_L x\,dy$ (12)

Вычислив среднее арифметическое (11) и (12), получим формулу площади через циркуляцию $\mathbf{S = \oint_L [-y\,dx + x\,dy]}$

Формула Грина

Дано: Правильная область D, ограниченная линией L, которая образована функциями $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке [a,b].
Найти: Связь между циркуляцией и двойным интегралом по области D.
Решение: Рассмотрим двойной интеграл и вычислим его через двукратный:



$$\iint\limits_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f2(x)} \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f2(x)} d\,X(x,y)\ dx =$$

$$= \int_a^b X(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f2(x)} dx = \int_a^b [\,X(x, f_2(x)) - X(x, f_1(x))\,]\,dx =$$

$$\int_a^b X(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b X(x, f_1(x))\,]\,dx = I_2 - I_1 \quad (13)$$

Интеграл I_2 соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла
$\rightarrow I_2 = -\int\limits_{AMB} X(x,y)\,dx$ (минус засчет движения по AMB по часовой стрелки)

Интеграл I_1 также соответствует 2 частному случаю линейного итеграла $\rightarrow I_1 = \int\limits_{ANB} X(x,y)dx$. Подставляем I_1 и I_2 в (13):

$$\iint\limits_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{AMB} X(x,y)\,dx - \int\limits_{ANB} X(x,y)\,dx$$

Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D. Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L:

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_L X(x,y)\,dx \quad (14)$$

Аналогично можно составить двойной интеграл по направлению y через циркуляцию по линии L по формуле:

$$\iint_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Y(x,y)\,dy \quad (15)$$

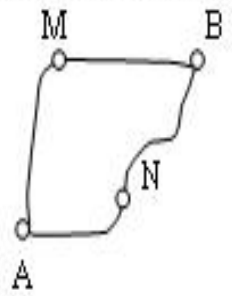
Вычитая из (15) формулу (13), получим:

$$\oint_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) dx\,dy$$

(16) - формула Грина

Условие независимости линейного интеграла от пути интегрирования

Сначала определим, что следует из того, если предположить, что линейный интеграл не зависит от пути интегрирования, т.е. от движения от точки A к точке B по двум любым кривым AMB и ANB.



Вычислим линейные интегралы по двум любым кривым AMB и ANB:

$-\int\limits_{AMB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]$ (17) (минус засчет движения по AMB по часовой стрелки)

$\int\limits_{ANB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]$ (18)

Из начального предположения следует, что интегралы (17) и (18) равны:

$$-\int\limits_{AMB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int\limits_{ANB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] \rightarrow \int\limits_{AMB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] + \int\limits_{ANB} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = 0$$

Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D. Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L:

$$\oint\limits_{L} [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = 0$$

Вывод: Циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

Рассмотрим теорему, определяющую условия, при которых справедлив этот вывод.

Терема: Если в некоторой области D, ограниченная линией L, функции X(x,y), Y(x,y) и их частные производные непрерывны, то, для того, чтобы циркуляция по любому замкнутому контуру была равна нулю, необходимо и достаточно выполнение следующего условия во всех точка области D:

$$\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \qquad (19)$$

Доказательство:

Вычислим циркуляцию по формуле Грина (16):

$$\oint_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \iint_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad (16)$$

Необходимое условие

Пусть условие (19) выполняется, тогда подынтегральная функция, стоящая в круглых скобках, в двойном интеграле (16) будет равна нулю, значит двойной интеграл в (16) равен нулю, значит циркуляция в (16) равна нулю, ч.т.д.

Достаточное условие

Пусть циркуляция в (16) равна нулю, значит двойной интеграл в (16) равен нулю, тогда подынтегральная функция, стоящая в круглых скобках, в двойном интеграле (16) будет равна нулю, значит условие (19) выполняется, ч.т.д.