

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ



Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:

Fedorovkniga.jimdo.com

Площадь поверхности.

Поверхностный интеграл первого рода.

Его вычисление и приложения.

Поверхностный интеграл второго рода и его физический
смысл.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

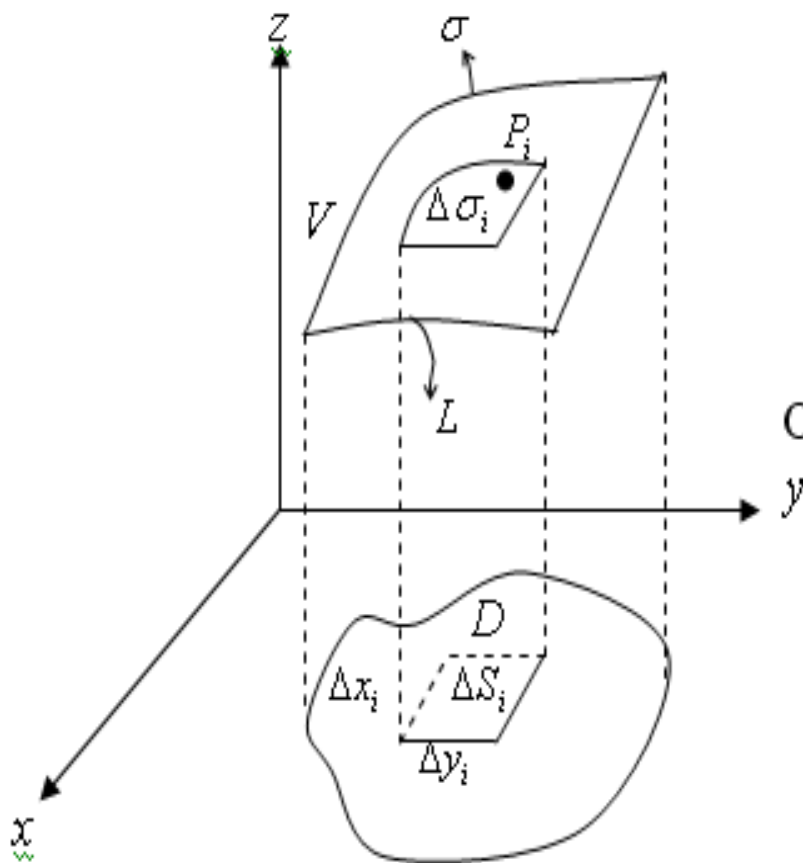
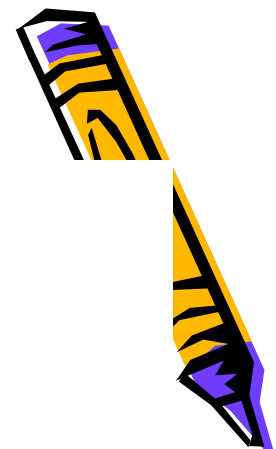
Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода по формуле
Остроградского.

Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Понятие
ротора.

Операторы Гамильтона и Лапласа.



Площадь поверхности.



Дано:
Поверхность
 $\sigma: z = f(x, y)$,
ограниченная
замкнутой линией L .
Определить площадь поверхности σ

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

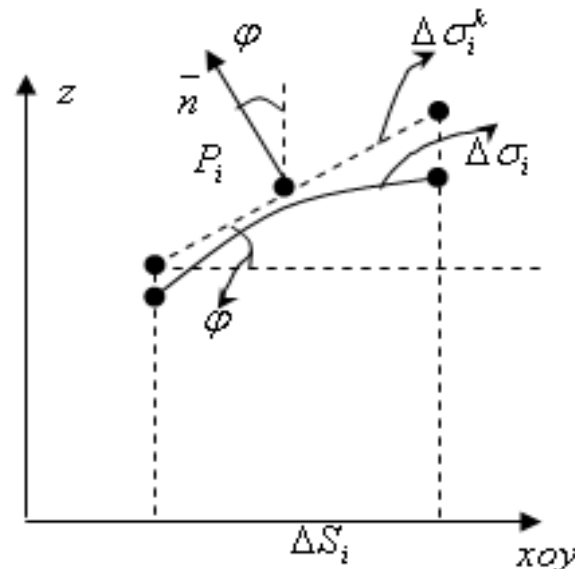




Решение:

Построим $D = \text{Пр}_{xoy} \sigma$. Разобьём σ на n -частей площадью $\Delta \sigma_i$ плоскостями параллельными координатным плоскостям xoz, yoz . Тогда: $\Delta S_i = \text{Пр}_{xoy} \Delta \sigma_i$. Площадь каждой части: $\Delta S_i = \text{Пр}_{xoy} \Delta \delta_i$; $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$.

Выберем на участке $\Delta \sigma_i$ произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и проведём через неё касательную плоскость к поверхности σ . На этой плоскости выделим участок площадью $\Delta \sigma_i^k$ так, чтобы $\Delta S_i = \text{Пр}_{xoy} \Delta \sigma_i^k$. Площадь участка поверхности приближённо заменим на площадь участка касательной плоскости, т.е. $\Delta \sigma_i \approx \Delta \sigma_i^k$





Из рисунка видно, что: $\Delta \sigma_i^k = \frac{\Delta S_i}{\cos \varphi}$.

Составим уравнение нормали к поверхности в точке P_i :

$$\frac{x - x_i}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y - y_i}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z - z_i}{1}$$

Из этого уравнения составим координаты направляющего вектора нормали \vec{n} :

$$\vec{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Направляющий косинус вектора определяется отношением соответствующей координаты вектора к его длине:

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3).$$

Подставляем (3) в (2): $\Delta \sigma_i^k = \Delta S_i \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ (4).





Подставляем (4) в (1): $\Delta\sigma_i \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta S_i$.

Площадь всей поверхности: $\sigma \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_i$

Точное значение получается в пределе:

$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_i$ - по определению – двойной интеграл.

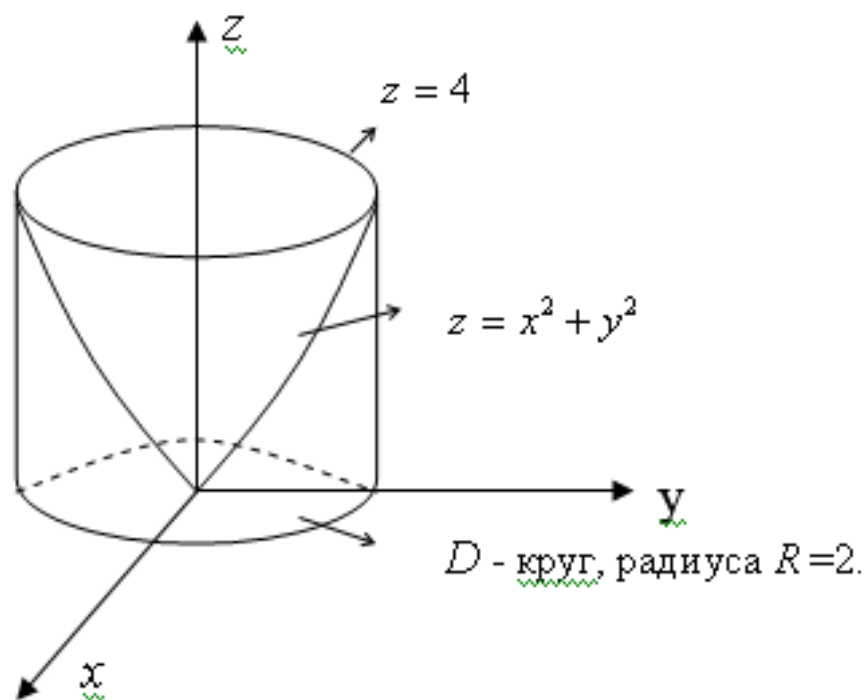
$$\sigma = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: Вычислить боковую поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$ ограниченного плоскостью $z = 4$.



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \sigma = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy = \left(\begin{array}{l} \text{переход в полярную} \\ \text{систему координат} \end{array} \right) = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1+4r^2} r dr d\phi =$$

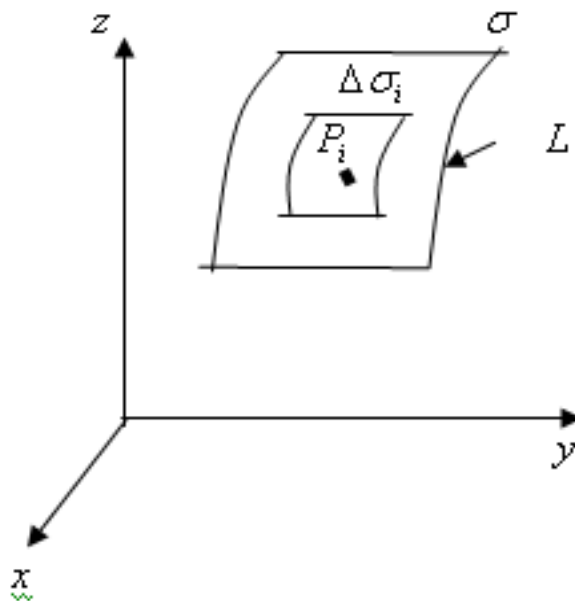
$$= \left(\begin{array}{l} \text{замена: } t = 1+4r^2, \\ dt = 8r dr \rightarrow dr = \frac{dt}{8r} \end{array} \right) = 4 \int_0^{2\pi} \int_1^{17} \sqrt{t} r \frac{dt}{8r} d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_1^{17} d\phi = \frac{1}{3} (17\sqrt{17} - 1) \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} (17\sqrt{17} - 1).$$



Поверхностный интеграл первого рода. Его вычисление и приложения.



Задача нахождения массы поверхности.



Дано: поверхность $\sigma: z = f(x, y)$, ограниченная линией L .

В каждой точке поверхности известна поверхностная плотность материала $F(x, y, z) \cdot \left(\frac{kg^2}{M^2}\right)$.

Определить массу поверхности σ .
Решение: Разобьем σ на n частей площадью $\Delta\sigma_i$. Внутри каждой части выбираем произвольную

точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и считаем плотность на всём участке постоянной равной значению плотности в выбранной точке, то есть $F(x_i, y_i, z_i)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Масса каждого участка $m_i \approx \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta \delta_i$,

масса всей поверхности $M \approx \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta \delta_i$. (1)

Точное значение массы получим в пределе $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta \delta_i$.

Определение: Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения на части и выбора точки внутри каждой части.

Обозначение поверхностного интеграла первого рода.

$$\iint_{\sigma} F(x, y, z) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta \sigma_i \quad (2)$$

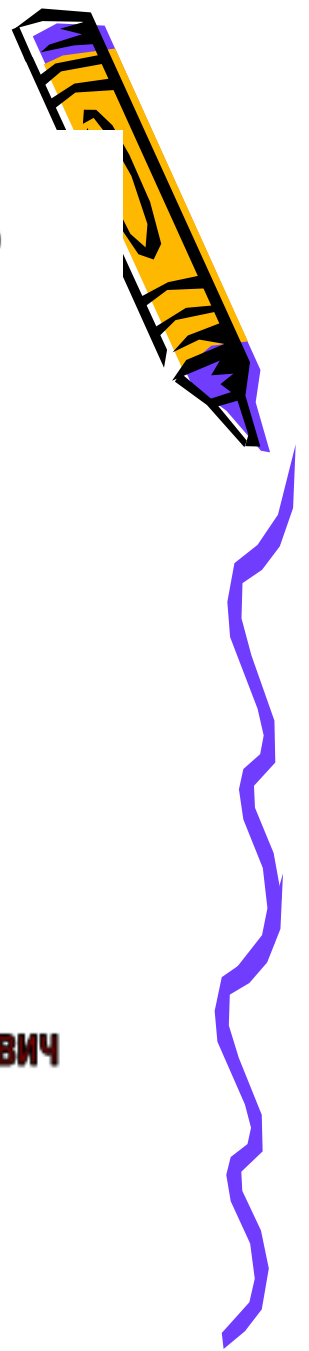
Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

$$\Delta \sigma_i \approx \Delta \sigma_i^k \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_i \quad (3)$$

Подставляем $\Delta \sigma_i$ из формулы (3) в (2) и функцию F вместо z_i в уравнение поверхности σ , то есть $z_i = f(x_i, y_i)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





$$\iint_{\sigma} F(x, y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_i$$
 - по определению двойной интеграл. Окончательно формула вычисления:

$$\iint_{\sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Приложения:

1. Масса поверхности: $M = \iint_{\sigma} F(x, y, z) d\sigma$
2. Площадь поверхности σ : $\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

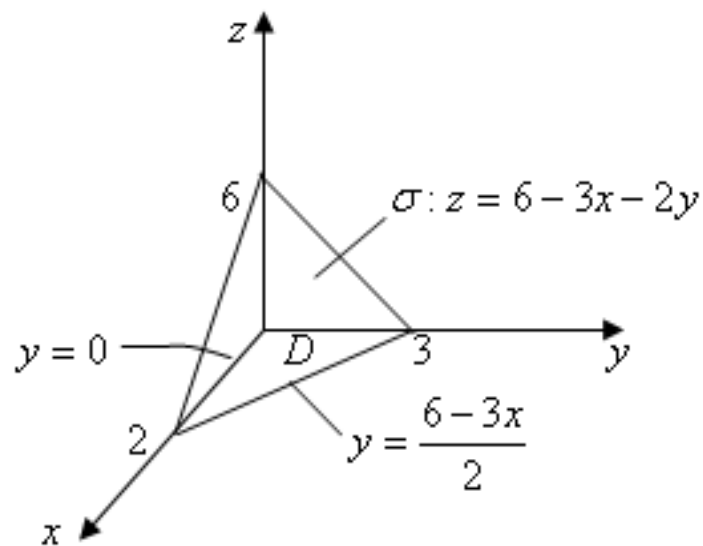




Пример: $\iint_{\sigma} (x+y+z)d\delta = I,$

где $\sigma: 3x+2y+z=6$, ограниченная плоскостями: $x=0, y=0, z=0$

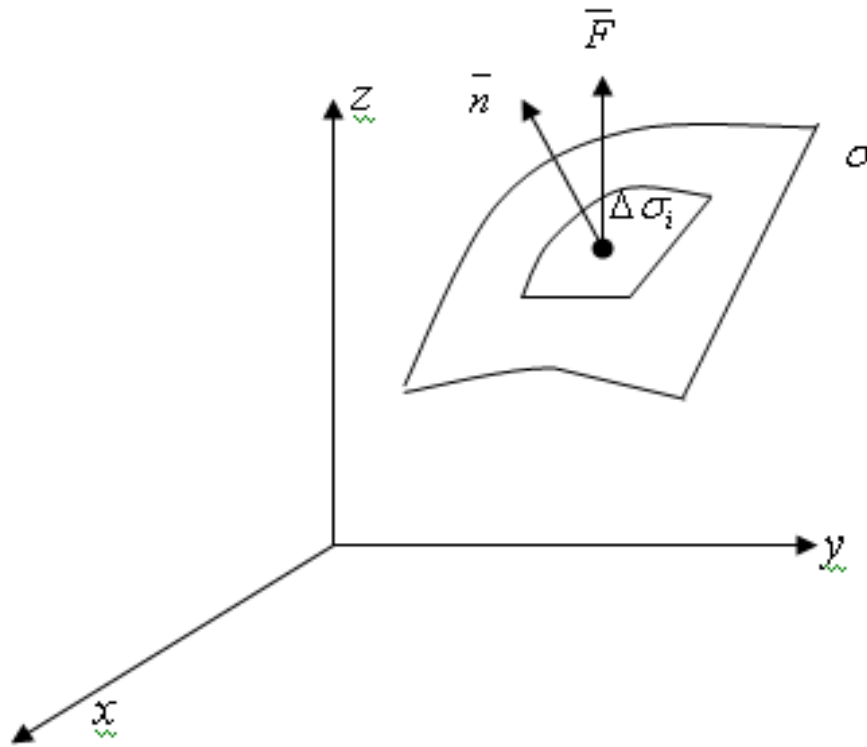
$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y+6-3x-2y)\sqrt{1+9+4}dxdy = \\ &= \sqrt{14} \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}(2-x)} (6-2x-y)dydx \end{aligned}$$



© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Поверхностный интеграл второго рода и его физический смысл.



Дано: поверхность $\underline{\sigma}: z = f(x, y)$, к каждой точке которой приложено два вектора:

- (1) $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$,
- (2) $\vec{n} \perp \sigma$, $\vec{n} = \cos(\vec{n} \wedge \underline{x})\vec{i} + \cos(\vec{n} \wedge \underline{y})\vec{j} + \cos(\vec{n} \wedge \underline{z})\vec{k}$.



Замечание: координаты второго вектора равны направляющим косинусам нормали поверхности.

Решение

Разбиваем поверхность σ на n - частей площадью $\Delta\sigma_i$. Внутри каждой части выбираем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ к которой приложим вектора (1) и (2). Будем считать, что вектора (1) и (2) не меняют ни направление, ни модуль в пределах каждой части. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}, \vec{n}) \Delta\sigma_i \quad (3)$$

Определение: Поверхностным интегралом 2-го рода или потоком вектора называется предел интегральной суммы (3), если этот предел не зависит от способа разбиения на части и выбора точки внутри каждой части.

Обозначение потока вектора:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\vec{F}, \vec{n}) \Delta\sigma_i \quad (4) \text{-сокращённая запись.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Вычислим скалярное произведение векторов в формуле (4), как сумму произведений соответствующих координат векторов (1) и (2).

$$\iint_{\sigma} [X(x, y, z) \cos(\vec{n} \wedge x) + Y(x, y, z) \cos(\vec{n} \wedge y) + Z(x, y, z) \cos(\vec{n} \wedge z)] d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i, z_i) \cos(\vec{n} \wedge x) + Y(x_i, y_i, z_i) \cos(\vec{n} \wedge y) + Z(x_i, y_i, z_i) \cos(\vec{n} \wedge z)] \Delta \sigma_i$$

Заменяем: $\Delta \sigma_i \approx \Delta \sigma_i^k = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos \phi}$ $\rightarrow \Delta \sigma_i \cos(\vec{n} \wedge z) \approx \Delta x_i \Delta y_i$
 $\Delta \sigma_i \cos(\vec{n} \wedge y) \approx \Delta x_i \Delta z_i$
 $\Delta \sigma_i \cos(\vec{n} \wedge x) \approx \Delta y_i \Delta z_i$

$$\iint_{\sigma} [X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy] =$$

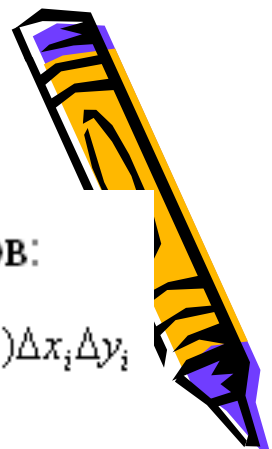
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i, z_i) dy_i dz_i + Y(x_i, y_i, z_i) dx_i dz_i + Z(x_i, y_i, z_i) dx_i dy_i] \quad (5)$$

(5) - развёрнутое обозначение потока вектора.

Физический смысл потока вектора.

Если вектор \vec{F} обозначает скорость движения жидкости, то поток вектора определяет количество жидкости протекающее через поверхность σ в единицу времени.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода.



Разобьём предел правой части формулы (5) на сумму трёх пределов:

$$\iint_{\delta} (\bar{F}, \bar{n}) d\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i \Delta z_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta z_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

Первый предел: вместо x необходимо подставить функцию $f_1(y, z)$, которая получается из заданного уравнения.

(Например: $\sigma: x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z = f_1(y, z)$).

Второй предел: заменим y на $f_2(x, z)$.

Третий предел: заменим z на $f_3(x, y)$.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\bar{F}, \bar{n}) d\delta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X(f_1(y_i, z_i), y_i, z_i) \Delta y_i \Delta z_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y(x_i, f_2(x_i, z_i), z_i) \Delta x_i \Delta z_i + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f_3(x_i, y_i)) \Delta x_i \Delta y_i \end{aligned}$$

Каждый из этих пределов по определению является двойным интегралом.





Анализ знаков

Произведения приращений, например: $\Delta x_i \Delta y_i = \Delta \sigma_i \cos(\bar{n} \wedge z)$.

Если угол $\bar{n} \wedge z$ острый, то \cos положительный.

Если угол $\bar{n} \wedge z$ тупой, то \cos отрицательный.

Значит, в каждом пределе произведение приращений имеет знаки \oplus или $(-)$, значит, каждый из двойных интегралов так же имеет знаки \oplus или $(-)$.

$$\iint_{\sigma} [X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy] = \pm \iint_{D_{yoz}} X(f_1(y, z), y, z) dy dz \pm$$

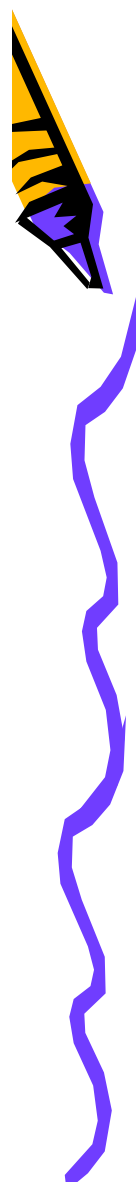
$$\pm \iint_{D_{xoz}} Y(x, f_2(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_{xoy}} Z(x, y, f_3(x, y)) dx dy.$$

Определение областей интегрирования

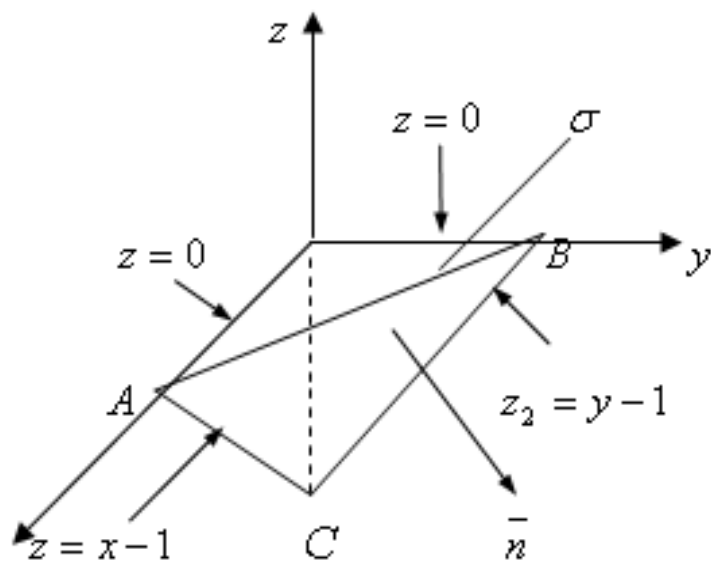
Соответственно область D определяется, как проекция поверхности σ на ту координатную плоскость, которая находится по переменным, стоящим в произведении дифференциалов.

Замечание: Для определения знака, необходимо задавать на какой поверхности внешней или внутренней приложены вектора \bar{F} и \bar{n} .

Соответственно ось, с которой ищется угол, определяется для каждого двойного интеграла, как недостающую координату произведения дифференциалов.



Пример: Вычислить поток вектора $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность $\sigma: x + y - z = 1$, ограниченную координатными плоскостями.



$$Dyoz = \triangle COB.$$

$$\iint_{\sigma} [x dydz + y dx dz + z dx dy] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$+ \iint_{Dyoz} \underbrace{(1-y+z)}_x dy dz = \int_0^1 \int_{y-1}^0 (1-y+z) dz dy =$$

$$= \int_0^1 \left((1-y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{y-1}^0 dy = \int_0^1 \left((y-1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (y-1)^2 dy = \frac{1}{2} \frac{(y-1)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (0 - (-1)) = \frac{1}{6}$$

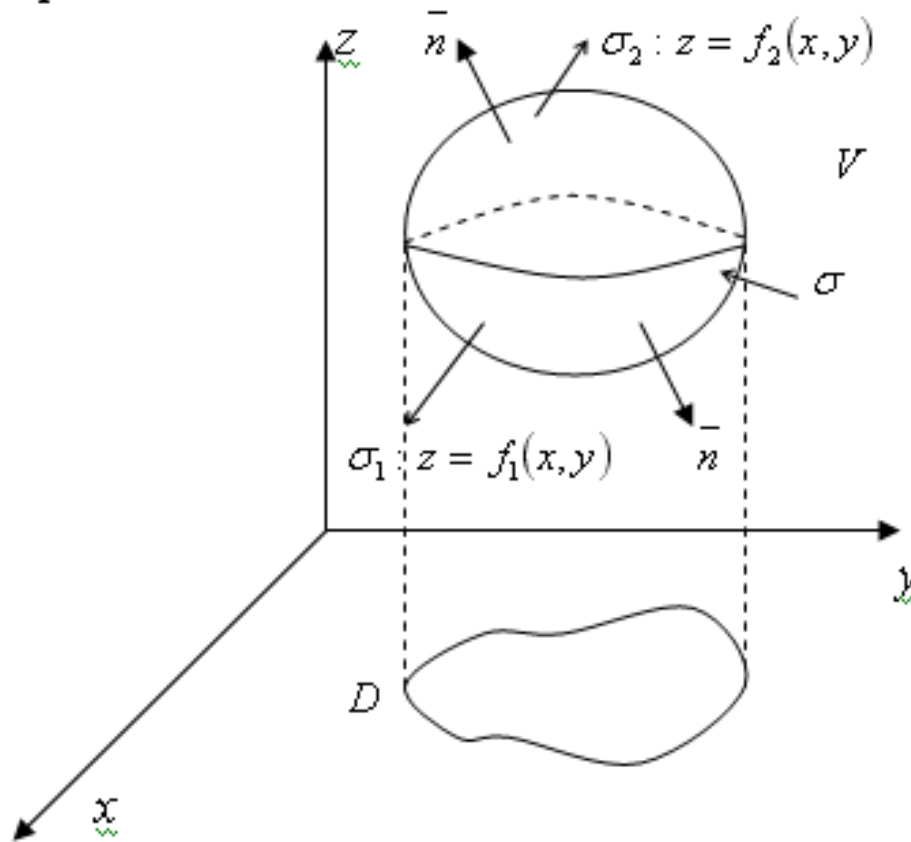
$$+ \iint_{Dxoz} \underbrace{(1-x+z)}_y dx dz = \int_0^1 \int_{x-1}^0 (1-x+z) dz dx = \frac{1}{6} ; \quad Dxoz = \triangle COA$$

$$- \iint_{Dxoy} \underbrace{(1+x+y)}_z dx dy = - \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+x+y) dy dx = - \int_0^1 \left((1+x)y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = - \int_0^1 \left((1-x^2) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{-6} \right) \Big|_0^1 = - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = -\frac{5}{6} ; \quad Dxoy = \triangle BOA$$

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода по формуле Остроградского.

Замечание: эта формула применяется для вычисления потока вектора через замкнутую поверхность.





Дано: Область V , образованная замкнутой поверхностью σ , в которой непрерывны функции: $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ и непрерывны их частные производные.

Найти: $\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = ?$

Решение:

Рассмотрим: $D = \text{Пр}_{xy}V$ и вычислим тройной интеграл:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} dZ(x, y, z) \right) dx dy = \iint_D Z(x, y, z) \Big|_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

Заменяем двойные интегралы на соответствующие им поверхностные интегралы: $\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy;$

Если $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, то $\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy$ (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович




Аналогично вычислить тройные интегралы от частных производных функции X, Y .

$$\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} X(x, y, z) dy dz \quad (2), \quad \iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Y(x, y, z) dx dz \quad (3).$$

Сложим почленно формулы (1), (2), (3) с учётом того, что сумма интегралов равна интегралам суммы.

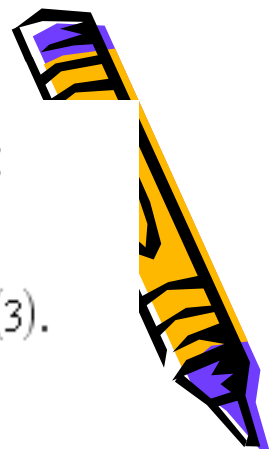
$$\iint_{\sigma} [X(x, y, z) dy dz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy] = \iiint_V \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (4)$$

Формула (4) является формулой Остроградского.

Введём понятие дивергенция вектора: $div \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ 

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_V div \vec{F} dx dy dz \quad (5) \text{-сокращённая формула Остроградского.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

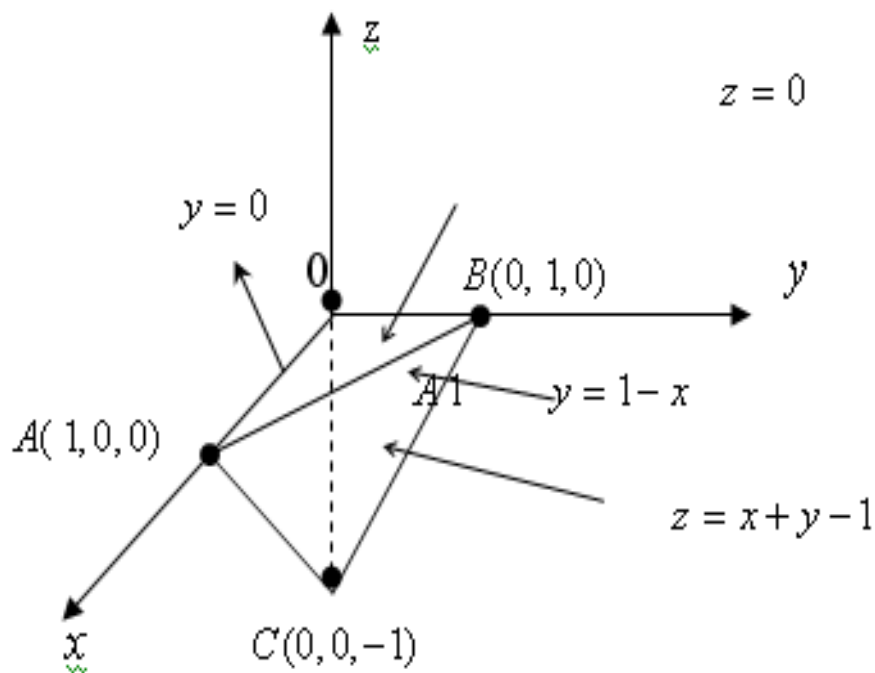




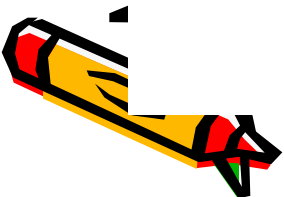
Пример:

Вычислить поток вектора $\vec{F} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через всю поверхность

$\sigma: x+y-z, x=0, y=0, z=0$.



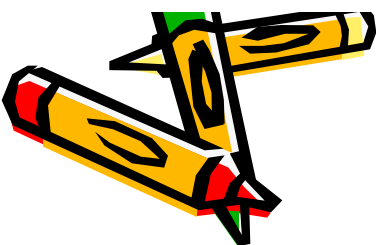
$$\frac{\partial X}{\partial x} = y, \frac{\partial Y}{\partial y} = -z, \frac{\partial Z}{\partial z} = x;$$



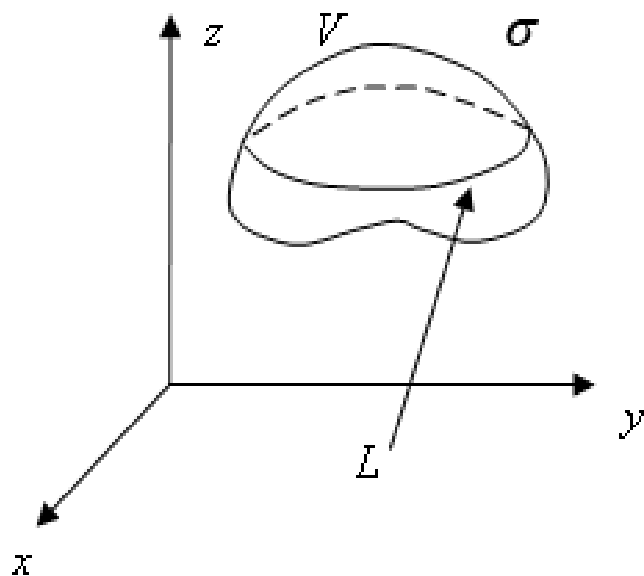


$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= \iiint_V (y - z + x) dx dy dz = \int_0^{1-x} \int_0^0 \int_{x+y-1}^0 (y + x - z) dz dy dx = \\ &= \int_0^{1-x} \int_0^0 \left[(x+y)z - \frac{z^2}{2} \right]_{x+y-1}^0 dy dx = - \int_0^{1-x} \int_0^0 \left[(x+y)^2 - (x+y) - \frac{((x+y)-1)^2}{2} \right] dy dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \int_0^0 (x+y-1)[2x+2y-x-y+1] dy dx = - \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \int_0^0 ((x+y)-1)((x+y)-1) dy dx = - \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \int_0^0 ((x+y)^2 - 1) dy dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x+y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx = - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x^3-3+3x}{3} dx = - \frac{1}{6} \int_0^1 (-x^3+3x-2) dx = - \frac{1}{6} \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 = \\ &= - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) = - \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Понятие ротора.



Дано: замкнутая поверхность σ , на которой расположена замкнутая линия L . Область V , образованная поверхностью σ , является области определения непрерывных функции X, Y, Z , имеющих непрерывные частные производные.

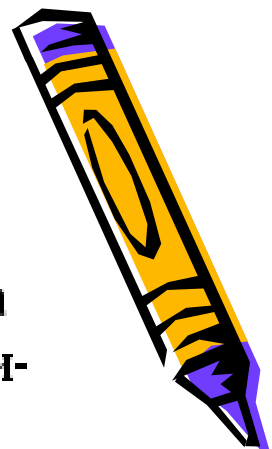
Найти: циркуляцию вектора

$$\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

по замкнутой линии L , т.е. $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = ?$,

где $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Решение:

Вычислим циркуляцию для частного случая направления вектора $\vec{F} \parallel OX$, то есть $\vec{F} = X(x, y, z)\vec{i}$. Тогда циркуляцию для этого вектора можно

вычислить по формуле Грина: $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$

$$Y = 0 \rightarrow \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy \quad (1)$$

Поверхность $\sigma: z = f(x, y) \rightarrow X(x, y, f(x, y))$ - сложная функция, значит, эту функцию надо дифференцировать, как сложную функцию нескольких переменных:

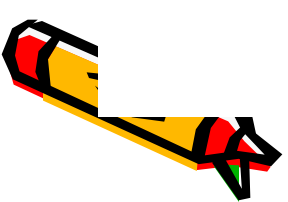
$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1)

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx dy$$

Каждый из этих двойных интегралов можно заменить на поверхностный интеграл второго рода, с учётом, что $dx dy = d\sigma \cos(\vec{n} \wedge z)$:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = - \iint_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial y} \cos(\vec{n} \wedge z) d\sigma - \int \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\vec{n} \wedge z) d\sigma \quad (3)$$



Координаты нормального вектора $\bar{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1 \right)$

Вычислим направляющие косинусы нормали с осями y и z .

$$\cos(\bar{n} \wedge y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{|\bar{n}|} \quad (4) \quad \cos(\bar{n} \wedge z) = \frac{1}{|\bar{n}|} \quad (5)$$

Разделим почленно (4) на (5):

$$\frac{\cos(\bar{n} \wedge y)}{\cos(\bar{n} \wedge z)} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

Подставляем (6) в (3)

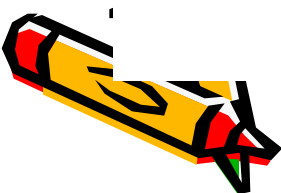
$$\oint_L (\bar{F}, d\bar{r}) = -\iint_S \frac{\partial X}{\partial y} \cos(\bar{n} \wedge z) d\sigma + \iint_S \frac{\partial X}{\partial z} \cos(\bar{n} \wedge y) d\sigma = \oint_L X dx \quad (7)$$

Аналогично можно вычислить циркуляцию для остальных случаев вектора \bar{F} , то есть $\bar{F} = Y\bar{j}$; $\bar{F} = Z\bar{k}$

$$\oint_L Y dy = -\iint_S \frac{\partial Y}{\partial z} \cos(\bar{n} \wedge x) d\sigma + \iint_S \frac{\partial Y}{\partial x} \cos(\bar{n} \wedge z) d\sigma \quad (8)$$

$$\oint_L Z dz = -\iint_S \frac{\partial Z}{\partial x} \cos(\bar{n} \wedge y) d\sigma + \iint_S \frac{\partial Z}{\partial y} \cos(\bar{n} \wedge x) d\sigma \quad (9)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Складываем почленно (7,8,9) с учётом того, что сумма интегралов равна интегралу суммы:

$$\oint_L [Xdx + Ydy + Zdz] = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(\bar{n} \wedge x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(\bar{n} \wedge y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(\bar{n} \wedge z) \right] d\sigma \quad (10)$$

Формула (10) является развёрнутой формулой Стокса. Если вектор \bar{F} не зависит от третьей координаты Z , то формула Стокса превращается в формулу Грина.

Понятие ротора.

Определение: Ротором называется вектор следующего вида

$$\text{rot } \bar{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k} \quad (11)$$

Нормальный вектор представим виде:

$$\bar{n} = \cos(\bar{n} \wedge x) \bar{i} + \cos(\bar{n} \wedge y) \bar{j} + \cos(\bar{n} \wedge z) \bar{k} \quad (12)$$

В формуле Стокса (10) в интеграле правой части представлено скалярное произведение векторов (11) и (12).

Тогда формула (10) будет иметь вид:

$$\oint_L (\bar{F}, d\bar{r}) = \iint_{\sigma} (\text{rot } \bar{F}, \bar{n}) d\sigma \quad (13)$$

Формула (13) является сокращённой формой записи формулы Стокса.



Пример: Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ по контуру сечения конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостями $y = 1, z = \sqrt{5}$.

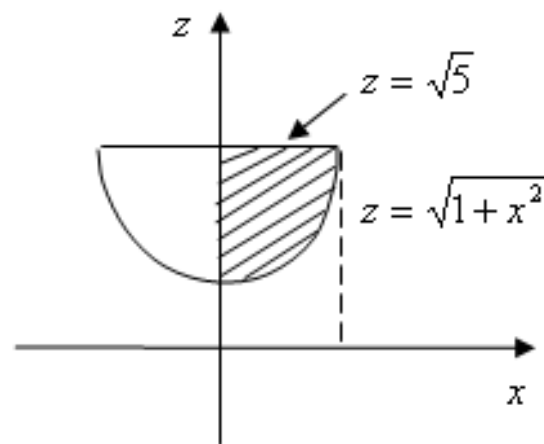
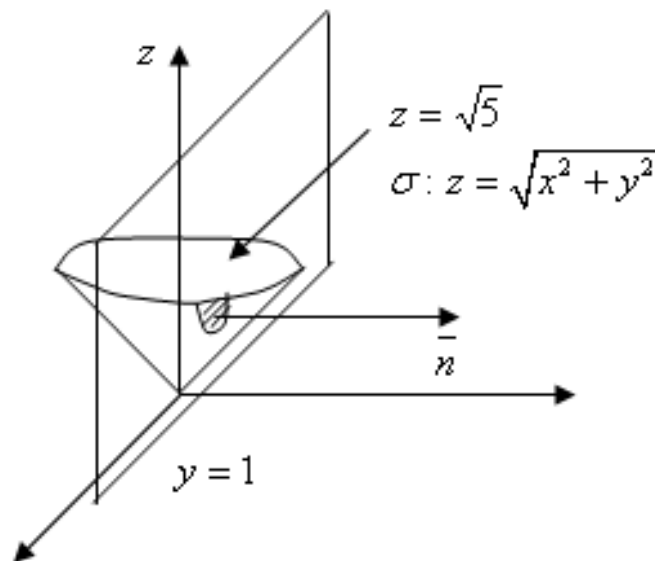


Рисунок: В плоскости $y = 1$, параллельной плоскости xoz

Подставим $y = 1$ в уравнение конуса: $x^2 + 1 = z^2 \rightarrow z^2 - x^2 = 1$ - гипербола

Найдём направляющие косинусы для формулы (10):

$$\vec{n} \wedge x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(\vec{n} \wedge x) = 0, \quad \vec{n} \wedge y = 0 \rightarrow \cos(\vec{n} \wedge y) = 1, \quad \vec{n} \wedge z = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(\vec{n} \wedge z) = 0$$

По условию: $X = Y = Z = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \frac{\partial X}{\partial z} = 2z; \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x$



Найдём точки пересечения прямой $z = \sqrt{5}$ и гиперболы $z^2 - x^2 = 1$:

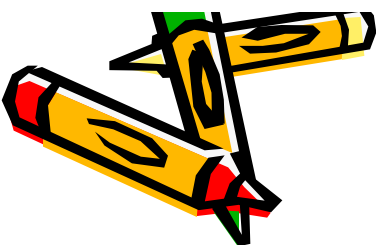
$$\sqrt{5} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow 5 = 1+x^2 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) &= \iint_{\sigma} (2z - 2x) d\sigma = 2 \iint_D (2-x) dx dz = 4 \int_0^2 \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{5}} (2-x) dz dx = 4 \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} - xz \right) \Big|_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{5}} dx = \\ &= 2 \int_0^2 (5 - 1 - x^2 - 2x\sqrt{5} + 2x\sqrt{1+x^2}) dx \end{aligned}$$

Замена: $t = 1+x^2, dt = 2x dx, t_n = 1, t_e = 5$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) &= 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} - \sqrt{5}x^2 \right) \Big|_0^2 + \int_1^5 \sqrt{t} dt = 2 \left(8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{5} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 \right) = 2 \left(\frac{16}{3} - 4\sqrt{5} + \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{5} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{14}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{5} \right) = \frac{4}{3} (7 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Операторы Гамильтона и Лапласа.



Определение: Вектором градиента скалярной функции $U(x, y, z)$ называется вектор, координаты которого являются частными производными от этой функции.

$$\overline{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} \quad (1)$$

Замечание: Вектор-градиент показывает направление наискорейшего изменения функции при движении к максимуму этой функции.

Вынесем условно за скобку функцию U в формуле (1).

$$\overline{gradU} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) U$$

Оператор Гамильтона (набла-оператор): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Приложения

1. Для вычисления вектора-градиента: $\overline{grad}U = \nabla U$

2. Для вычисления дивергенции: $div \overline{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ (2). $\overline{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ (3).

Вычислим скалярное произведение оператора Гамильтона и вектора (3):

$$(\nabla, \overline{F}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv (2) \rightarrow \rightarrow div \overline{F} = (\nabla, \overline{F})$$

3. Для вычисления ротора: $rot \overline{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k}$ (4).

Вычислим векторное произведение оператора Гамильтона на вектор (3).

$$[\nabla, \overline{F}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \rightarrow rot \overline{F} = [\nabla, \overline{F}]$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \bar{j} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \equiv (4)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





4. Оператор Лапласа

Вычислим по формулам (1) и (2):

$$\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}U}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U.$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ - оператор Лапласа } \rightarrow \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}U}) = \Delta U$$

Вычислим, используя последовательно 1 и 2 приложения:

$$\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}U}) = (\nabla, \overline{\operatorname{grad}U}) = (\nabla, \nabla U) = (\nabla, \nabla)U = \nabla^2 U; \rightarrow \Delta U = \nabla^2 U; \Delta = \nabla^2;$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





5. Производная скалярного поля $U(x, y, z)$ по направлению вектора

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma \quad ,$$

где направляющие косинусы вектора \vec{F} :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Рассмотрим вектор, координаты которого соответствуют направляющим косинусам: $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Тогда производная по направлению будет вычисляться с помощью оператор Гамильтона:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = (\nabla, \vec{n}) U$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

