Неопределенный и определенный интегралы

Понятие первообразной и неопределённого интеграла.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, если эти функции связаны следующим соотношением: $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1: Если $F(x)$ первообразная от $f(x)$, то $F(x)+c$ также является первообразной от этой функции $c-const$.

Доказательство

$\left(F(x)+C\right) = \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} + C' = f(x)+0 = f(x) \to F(x)+C$ -первообразная.

Теорема 2: Если одна и та же функция имеет две первообразные, то они отличаются друг от друга на величину произвольной постоянной.

Доказательство

$\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x) \to \varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\varphi'(x) = C$ - произвольная константа.

Определение: Неопределённым интегралом называется бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга на величину произвольной постоянной.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C$

$f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла.

1. Производная от интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x)$$

2. Дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$$

Следствие: $\int dx = x + C$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx, \quad C - const.$$

Доказательство:

Вычислим производную от левой и правой части:

$$\left(\int Cf(x)dx\right)' = Cf(x) \qquad \left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x).$$

Получили одно и то же выражение, значит формула четвёртого свойства верна.

5. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов вычисленных от каждой из этих функций.

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Доказательство:

$$\left(\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)$$

Получили одно и то же выражение, значит формула пятого свойства верна.

6. Если аргумент подынтегральной функции в свою очередь является линейной функцией, то интеграл вычисляется по формуле: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$

Доказательство: $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+c\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)a = f(ax+b)$

Таблица неопределённых интегралов.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	Доказательство	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\left(\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} =$ $= \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a} arctg \frac{1}{a} + C\right)' = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 \frac{a^2+x^2}{a^2}}$	
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\left(\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C\right)' = \frac{1}{2a} \frac{x+a}{x-a} \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a} \frac{2a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2-a^2}$	
$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	Аналогично	
$\int tg\, x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\left(-\ln\lvert\cos x\rvert + C\right)' = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = tg\, x$	
$\int ctg\, x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert\sin x\rvert + C\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{c}tg\, x$	

Пример: $\int ctg(5x-1) dx = \frac{\ln\lvert\sin(5x-1)\rvert}{5} + C$

Замена переменных в неопределённом интеграле.

Целью замены переменных является преобразование подынтегральной функции так, чтобы получить один из табличных интегралов.

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Замена: $x = x(t)$; $dx = x'(t)dx$

Для доказательства формулы вычислим производную от левой и правой части по одной и той же переменной x.

$$\left(\int f(x)dx\right)_x ' = f(x)$$

$$\left(\int f(x(t))x'(t)dt\right)'_x = \frac{\left(\int f(x(t))x'(t)dt\right)'_t}{x'(t)} = \frac{f(x(t))x'(t)}{x'(t)} = f(x(t)) = f(x)$$

Используем функцию произвольной параметрической функции:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x't} = f(x(t)) = f(x)$$

Правила замены переменных.

Правило 1: Если подынтегральная функция представлена в виде произведения сложной и элементарной функцией, то в качестве новой переменной t выбирается аргумент сложной функции так, чтобы производная от него была пропорциональна элементарной функции.

Пример: $\int e^{\cos x} \sin x dx = \int e^t \sin x \frac{dt}{-\sin x} = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\cos x} + c$

Замена: $t = \cos x$; $dt = -\sin dx \to dx = \frac{dt}{-\sin x}$

Замечание: После получения первообразной, при замене переменных, осуществляется обратная замена переменных.

Правило 2: Если подынтегральная функция содержит одно из следующих выражений, то применяется одна из следующих формул замены:

1) $\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a\sin t \qquad dx = a\cos t dt$

2) $\sqrt{x^2 - a^2} \to x = \frac{a}{\sin t} \quad \to dx = -\frac{a\cos t}{\sin t}dt$

3) $\sqrt{x^2 + a^2} \to x = atgt \qquad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$

Обратная замена: $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $t = \arcsin\frac{a}{x}$; $t = \mathrm{arc}\,tg\frac{x}{a}$

Замечание: Указанные формулы замены носят название – тригонометрическая подстановка.

Интегрирование по частям неопределённого интеграла.

Интегрирование по частям применяется, если подынтегральная функция представлена в виде произведения двух элементарных функций, входящих в состав табличных.

Вычислим дифференциал произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций: $d\left(uv\right)=vdu+udv$. Проинтегрируем левую и правую части: $\int d\left(uv\right)=uv=\int vdu+\int udv\to\int udv=uv-\int vdu$ - формула интегрирования по частям.

Случаи интегрирования по частям.

1. Если подынтегральная функция представлена в виде произведения многочлена n -ой степени $P_n\left(x\right)$ и элементарной функции $f\left(x\right)$, входящей в состав табличных, то:
   $u=P_n\left(x\right)\to du=P_n{}'\left(x\right)dx;\qquad dv=f\left(x\right)dx\to v=\int f\left(x\right)dx$

Замечание: В этом случае формула интегрирования по частям применяется столько раз, какова степень многочлена.

2. Если подынтегральная функция содержит одну из следующих элементарных функций $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx$, то в формуле интегрирования по частям в качестве u выбирается одна из указанных функций, в качестве dv все остальные, входящие в подынтегральное выражение.

Замечание: Если подынтегральная функция представлена только одной из указанных функций, то $dv=dx\to v=x$.

3. Если подынтегральная функция представлена в одном из следующих видов: $a^{bx}\sin cx,\ a^{bx}\cos cx,\ \sin bx\cos cx$, то формула интегрирования по частям применяется 2 раза. В результате чего в левой и правой частях получится искомый интеграл, который находится из решений полученного уравнения, как уравнение с одним неизвестным.
4.

Пример: $I=\int e^x\sin 2xdx$

$$u=e^x\to du=e^xdx;\quad dv=\sin 2xdx\to V=\int\sin 2x=-\frac{\cos 2x}{2}$$

$$I=e^x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\cos 2xe^xdx;\quad u=e^x\to du=e^xdx;\quad dv=\cos 2xdx\to v=\frac{\sin 2x}{2}$$

$$I=-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}\left(e^x\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\sin 2xe^xdx\right)\to I=\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{4}e^x\sin 2x-\frac{1}{4}I$$

$$I+\frac{1}{4}I=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right);\to I=\frac{2}{5}e^x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

Интегрирование рациональных выражений.

$$\frac{h}{ax+b} \text{ и } \frac{h}{(ax+b)^k}, \text{ где } \qquad a,b,h - const$$

$$\int \frac{h}{ax+b}dx = h\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{h\ln|ax+b|}{a} + C; \qquad \int \frac{h}{(ax+b)^k} = h\int (ax+b)^{-k}dx = \frac{h(ax+b)^{k+1}}{a(1-k)} + C$$

Замечание: Если интегралы представлены в виде: $\int \frac{P_n(x)}{ax+b}dx$, $(n>1)$ или $\int \frac{G_m(x)}{(ax+b)^k}dx$, $(m>k)$, то по правилу деления столбиком многочлен числителя делится на многочлен знаменателя, выделяется целая часть в виде многочлена соответственно $n-1$ или $m-k$ степени и одна из рассмотренных правильных дробей.

Пример: $I = \int \frac{5x^2+6x+3}{2x+1}dx$

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 + 6x + 3 & \underline{2x+1} \\ -\underline{\left(5x^2 + \frac{5}{2}x\right)} & \frac{5}{2}x + \frac{7}{4} \\ \quad \frac{7}{2}x + 3 & \\ \quad -\underline{\left(\frac{7}{2}x + \frac{7}{3}\right)} & \\ \qquad 2/3 & \end{array}$$

$$\to I = \int\left(\frac{5}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{2}{3}\frac{1}{2x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{2}{3}\frac{Ln|2x+1|}{2} =$$

$$= \frac{5x^2}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{2Ln|2x+1|}{6} + C$$

Интегрирование рационального выражения:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} \quad a,b,c,m,n-const.$$

Алгоритм решения

1. Выделяем полный квадрат из знаменателя.

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

Введём обозначение: $p=\frac{b}{2a};\ \pm q^2=\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]$$

2. $I=\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{mx+n}{a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]}dx=\frac{1}{a}\int\frac{m(t-p)+n}{t^2\pm q^2}$

Замена: $t=x+p\to x=t-p\to dx=dt$.

3. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов.

$$I=\underbrace{\frac{1}{a}\int\frac{mt}{t^2\pm q^2}dt}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{a}\int-\frac{mp+n}{t^2\pm q^2}dt}_{I_2}$$

4. Вычислим интеграл I_1: $\quad I_1=\frac{m}{a}\int\frac{t}{t^2\pm q^2}dt=\frac{m}{a}\int\frac{t}{u}\frac{du}{2t}=\frac{m}{2a}\int\frac{du}{u}=\frac{m}{2a}\ln|u|$

Замена: $u=t^2\pm q^2$, $du=2tdt\to dt=\frac{du}{2t}\to I_1=\frac{m}{2a}\ln\left|t^2\pm q^2\right|=\frac{m}{2a}\ln\left|(x+p)^2\pm q^2\right|$

5. Вычислим интеграл I_2: $\quad I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{t^2\pm q^2}dt$

1 случай: $a>0$, знак + в знаменателе:

$$I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{q^2+t^2}dt=\frac{n-mp}{a}\frac{1}{q}arctg\frac{t}{q}=\frac{n-mp}{aq}arctg\frac{x+p}{q}$$

2 случай: $a>0$, знак – в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{t^2-q^2}dt=\frac{n-mp}{a}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{t-q}{t+q}\right|=\frac{n-mp}{2aq}\ln\left|\frac{x+p-q}{x+p+q}\right|$$

3 случай: $a<0$, знак – в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{|a|}\int\frac{1}{q^2-t^2}dt=\frac{n-mp}{|a|}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{t+q}{t-q}\right|=\frac{n-mp}{|a|}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x+p+q}{x+p-q}\right|$$

4 случай: $a<0$, знак + в знаменателе.
В этом случае первообразная такая же, как и в первом случае, только перед интегралом появится знак минус.

$$I_2=-\frac{n-mp}{|a|q}arctg\frac{x+p}{q}$$

6. $I=I_1+I_2+C$

Интегрирование иррационального выражения $\frac{h}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Алгоритм решения

1. Выделяется полный квадрат из подкоренного выражения: $ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]$
2. $I=\int\frac{h}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}}dx$.
3. Замена: $t=x+p;\ dx=dt$ $\qquad I=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt$

1 случай: $a>0$, знак $\pm$

$$I=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt=\frac{h}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|=\frac{h}{\sqrt{a}}\ln\left|x+p+\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\right|$$

2 случай: $a<0$, знак – в знаменателе.

$$I=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\int\frac{1}{\sqrt{q^2-t^2}}dt=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{q}=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x+p}{2}$$

3 случай: $a<0$, знак + в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

4. Прибавляем к одной из первообразных произвольную постоянную.

Интегрирование иррационального выражения

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,, \quad \text{где} \quad a,b,c,m,n-const\,.$$

1. Выделяем полный квадрат.

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]$$

2. $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{mx+n}{\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{m(t-p)tn}{\sqrt{t^2\pm q^2}}$

Замена: $t=x+p,\ x=t-p;\ dx=dt$

3. Разбиваем на сумму двух интегралов.

$$I=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{mt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{n-mp}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt}_{I_2}$$

4. Вычислим I_1.

$$I_1=\frac{m}{\sqrt{a}}\int\frac{t}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt=\frac{m}{a}\int\frac{t}{\sqrt{a}}\frac{du}{2t}=\frac{m}{2\sqrt{a}}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{m}{2\sqrt{a}}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{t^2\pm q^2}=\frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{(x+p)^2\pm q}$$

Замена: $u=t^2\pm q^2;\ du=2tdt;\ dt=\frac{du}{2t}$

5. Вычислим I_2: $\qquad I_2=\frac{n-mp}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}$

1 случай: $a>0$, знак $\pm$ в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}=\frac{n-mp}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|=\frac{n-mp}{\sqrt{a}}\ln\left|x+p+\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\right|$$

2 случай: $a<0$, знак – в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{q^2-t^2}}=\frac{n-mp}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{q}=\frac{n-mp}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x+p}{q}$$

3 случай: $a<0$, знак + в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

6. $I=I_1+I_2+C$

Интегрирование иррационального выражения $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Алгоритм решения

1. $ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right];\ \ I=\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\,dx$

2. замена: $t=x+p;\ dt=dx\to I=\sqrt{a}\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt$

3. $a>0$, знак $\pm$ $\qquad I=\sqrt{a}\underbrace{\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt}_{I_0};\ \ I_0=\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt$

Интегрируем по частям:

$$I_0=uv-\int v\,du;\qquad u=\sqrt{t^2\pm q^2}\to du=\frac{2t}{2\sqrt{t^2\pm q^2}}dt;\quad dv=dt\to v=t$$

$$I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}\to\qquad I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-\int\frac{\left(t^2\pm q^2\right)\pm q^2}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt$$

Разобьём на 2 интеграла.

$$I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-\underbrace{\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt}_{=I_0}\pm q^2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}\to I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-I_0\pm q^2\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|$$

$$I_0=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2\pm q^2}\pm q^2\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|\right)\to I=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(t\sqrt{t^2\pm q^2}\pm q^2\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|\right)$$

$$I=\frac{\sqrt{a}}{2}\left((x+p)\sqrt{(x+p)^2+q^2}\pm q^2\ln\left|x+p+\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\right|\right)+C$$

4. $a<0$, знак $-$ $\qquad I=\sqrt{|a|}\int\sqrt{q^2-t^2}\,dt$

Применяем тригонометрическую подстановку: $t=q\sin u\to u=\arcsin\frac{t}{q};\ \ dt=q\cos u\,du$.

$$I=\sqrt{|a|}\int\sqrt{a^2-q^2\sin^2u}\,q\cos u\,du=q^2\sqrt{|a|}\int\sqrt{1-\sin^2u}\cos u\,du=q^2\sqrt{|a|}\int\cos^2u\,du=$$

$$=q^2\sqrt{|a|}\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(u+\frac{\sin 2u}{2}\right)=\frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(\arcsin\frac{t}{q}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{t}{q}\right)\right)$$

$$I=\frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(\arcsin\frac{x+p}{q}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+p}{q}\right)\right)+C$$

Разложение рациональной дроби на простейшие и её интегрирование.

Дано: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m, причём $n<m$, в противном случае необходимо разделить многочлены, выделить целую часть и правильную рациональную дробь.

1 случай: корни многочлена знаменателя действительные.

Замечание: Кратность корня показывает, сколько раз повторяется одно и то же значение корня.

Пусть: x_1-первый корень, с кратностью k_1; x_2 - с кратностью $k_2 \ldots x_l$ - с кратностью k_l

В первом случае исходная дробь раскладывается на простейшие по следующей формуле:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{C}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{D}{x-x_2}+\frac{E}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{F}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$
$$+\frac{Q}{x-x_n}+\frac{H}{(x-x_n)^2}+\ldots+\frac{I}{(x-x_n)^{k_n}} \qquad (1)$$

$A, B, C\ldots -$ неизвестные коэффициенты, которые находятся по следующей схеме:

1) Правая часть, разложение (1), приводится к общему знаменателю, в качестве которого буде выступать многочлен $Q_m(x)$.
2) Приравниваем многочлены числителей, стоящих в левой и правой части.
3) Приравниваем коэффициенты перед одинаковыми степенями x у многочленов левой и правой части.

В результате получится система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A, B, C\ldots$. Решаем эту систему, находим неизвестные коэффициенты. Найденные коэффициенты $A, B, C\ldots$ подставляются в разложение (1) и интеграл от исходной рациональной дроби вычисляется через сумму интегралов от каждой из построенных дробей разложения.

$$\int\frac{Pn(x)}{Qm(x)}dx=\int\frac{A}{x-x_1}dx=\int\frac{B}{(x-x_1)^2}dx+\ldots+\int\frac{C}{(x-x_1)^{k_1}}dx+\ldots=A\ln(x-x_1)-\frac{B}{x-x_1}-\ldots-\frac{C(x-x_1)^{k_1-1}}{1-k_1}+\ldots$$

Пример: $I=\int\frac{x^2+4}{(x-3)(x-2)^2}dx$

$$\frac{x^2+4}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2} \qquad \to Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-5Bx+6B+Cx-3C=x^2+4$$

$$x^2\left| A+B=1 \right.$$
$$x^1\left| -4A-5B+C=0 \right. \quad \rightarrow \begin{matrix} A=13 \\ B=-12 \\ C=-8 \end{matrix}$$
$$x^0\left| 4A+6B-3C=4 \right.$$

$$\rightarrow I=13\int \frac{1}{x-3}dx-12\int \frac{1}{x-2}dx-8\int \frac{1}{(x-2)^2}dx.=13\ln|x-3|-12\ln|x-2|+\frac{8}{x-2}\rightarrow I=\ln\frac{|x-3|^{13}}{(x-2)^{12}}+\frac{8}{x-2}+C$$

2 случай: Многочлен знаменателя имеет только комплексные корни.

В этом случае исходная дробь раскладывается на простейшие по следующей формуле:

$$\frac{Pn(x)}{Qm(x)}=\underbrace{\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+B}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{Ex+F}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}}_{\text{для первой пары комплексных корней.}}+ \qquad (2)$$
$$+\underbrace{\frac{Hx+Q}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{Ix+K}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\ldots+\frac{Lx+M}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}}}_{\text{для второй пары комплексных корней.}}+\ldots$$

Замечание: Если многочлен знаменателя имеет и действительные и комплексные корни, то в этом случае формула разложения складывается и первой и второй формулы.

Замечание: Для второго случая коэффициенты $A, B, C\ldots$ находятся также как и для первого случая.

Пример: $I=\int \frac{x}{(x-2)(x^2+x+1)}dx$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \rightarrow Ax^2+Ax+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C=x$$

$$x^2\left| A+B=0 \right.$$
$$x^1\left| A-2B+C=1 \right. \quad \rightarrow \begin{matrix} A=\frac{2}{7} \\ B=-\frac{2}{7} \\ C=\frac{1}{7} \end{matrix}$$
$$x^0\left| A-2C=0 \right.$$

$$\rightarrow I=\frac{2}{7}\int \frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{7}\int \frac{-2x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{7}\ln|x-2|+\frac{1}{7}\int \frac{-2x+1}{x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx\rightarrow I=\frac{2}{7}\ln|x-2|+\frac{1}{7}\int \frac{-2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

Замена: $t = x + \frac{1}{2} \to x = t - \frac{1}{2} \to dx = dt$

$$\to I = \frac{2}{7}\ln|x-2| + \frac{1}{7}\int \frac{-2t+1+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt \quad \to I = \frac{2}{7}\ln|x-2| + \frac{2}{7}\left(-\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt\right)$$

Еще одна замена: $u = t^2 + \frac{3}{4} \to du = 2tdt \to dt = \frac{du}{2t} \to I = \frac{2}{7}\left(\ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)$

$$\to I = \frac{2}{7}\left(\ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) \to I = \frac{2}{7}\left(\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln u + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\to I = \frac{2}{7}\left(\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\to I = \frac{2}{7}\left(\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\to I = \frac{2}{7}\left(\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right) + C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Эта подстановка применяется, если подынтегральная функция содержит синус и косинус.

Универсальная подстановка имеет следующий вид:

$$t = tg\frac{x}{2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad x = 2arctgt; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{:|\cos^2\frac{x}{2}}{:|\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}; \qquad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{:|\cos^2\frac{x}{2}}{:|\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}$$

Пример: $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

$$I = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Интегрирование целых положительных нечетных степеней синуса и косинуса.

Дано: $I_1 = \int \sin^{2m+1} xdx;$ $I_2 = \int \cos^{2m+1} xdx$

Этапы решения:

1. Нечётная степень разбивается на чётную и первую степени соответствующих функций.
$$I_1 = \int \sin^{2m} x \sin xdx; \qquad I_2 = \int \cos^{2m} x \cos xdx$$
2. Чётная степень представляется в виде второй и m - ной степени.
$$I_1 = \int \left(\sin^2 x\right)^m \sin xdx; \qquad I_2 = \int \left(\cos^2 x\right)^m \cos xdx$$
3. Используя основное тригонометрическое тождество, представляем:
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \to I_1 = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^m \sin xdx$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \to I_2 = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^m \cos xdx$$
4. Замена: $I_1 \to t = \cos x \to dt = -\sin xdx;$ $I_2 \to t = \sin x \to dt = \cos xdx$
$$I_1 = -\int \left(1 - t^2\right)^m dt; \qquad I_2 = \int \left(1 - t^2\right)^m dt$$
5. Возведение в любую степень выражения вида: $(1-a)$
$$(1-a)^m = 1 - ma + m(m-1)\frac{a^2}{2!} - m(m-1)(m-2)\frac{a^3}{3!} + .. + (-1)^m a^m$$
$$I_2 = \int \left(1 - mt^2 + m(m-1)\frac{t^4}{2} - m(m-1)(m-2)\frac{t^6}{6} + ... + (-1)^m t^{2m}\right)dt$$
$$I_2 = t - m\frac{t^3}{3} + \frac{m(m-1)}{10}t^5 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}t^7 + ... + \frac{(-1)^m}{2m+1}t^{2m+1}$$
$$I_2 = \sin x - \frac{m}{3}\sin^3 x + \frac{m(m-1)}{10}\sin^5 x - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\sin^7 x + ... + \frac{(-1)^m}{2m+1}\sin^{2m+1} x + C$$
$$I_1 = -\cos x + \frac{m}{3}\cos^3 x - \frac{m(m-1)}{10}\cos^5 x + \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\cos^7 x + ... + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}\cos^{2m+1} x + C$$

Пример: $I = \int \sin^5 10xdx$

$$I = \int \sin^4 10x\, sin10xdx = \int \left(\sin^2 10x\right)^2 sin10xdx = \int \left(1 - \cos^2 10x\right)^2 sin10xdx$$

Замена: $t = \cos 10x \to dt = -10\sin 10xdx \to$ $I = \frac{1}{10}\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = \frac{1}{10}\int \left(1 - 2t^2 + t^4\right)dt$
$$I = \frac{1}{10}\left(t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) = \frac{1}{10}\left(\cos 10x - 2\frac{\cos^3 10x}{3} + \frac{\cos^5 10x}{5}\right) + C$$

Интегрирование целых положительных чётных степеней синуса и косинуса.

Этапы решения:

Дано: $I_1=\int\sin^{2m}xdx;$ $\qquad I_2=\int\cos^{2m}xdx$

1. Чётная степени представляется в виде второй и m-ной степени.

$$I_1=\int\left(\sin^2 x\right)^m dx;\qquad I_2=\int\left(\cos^2 x\right)^m dx$$

2. Используется формула удвоения аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos^2\alpha}{2}\qquad \to I_1=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m dx$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos^2\alpha}{2}\qquad \to I_2=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^m dx$$

$$I_1=\frac{1}{2^m}\int\left(1-\cos 2x\right)^m dx;\qquad I_2=\frac{1}{2^m}\int\left(1+\cos 2x\right)^m dx$$

3. Возведение в любую степень и интегрирование:

$$I_1=\frac{1}{2^m}\int\left(1-m\cos 2x+m(m-1)\frac{\cos^2 2x}{2}-\frac{m(m-1)(m-2)\cos^3 2x}{6}+\ldots+(-1)^m\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(\begin{array}{l} x-\dfrac{m\sin 2x}{2}+\dfrac{m(m-1)}{2}\displaystyle\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx- \\ -\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}\displaystyle\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos xdx+\ldots+(-1)^m\int\cos^m 2xdx\end{array}\right)$$

Замечание: Начиная с третьего слагаемого, интеграл содержит чередование чётных и нечётных степеней косинуса. Чётные степени интегрируются по методике этого вопроса, нечётные степени по методике предыдущего вопроса.

Замечание: В интеграле I_2 все знаки будут противоположные.

Пример: $I=\int\sin^6 20xdx$

$$I=\int\left(\sin^2 20x\right)^3 dx=\frac{1}{2^3}\int\left(1-\cos 40x\right)^3 dx=\frac{1}{8}\int\left(1-3\cos 40x+3\cos^2 40x-\cos^3 40x\right)dx$$

$$I=\frac{1}{8}\left(\int dx-3\int\cos 40x\mathrm{dx}+\frac{3}{2}\int\left(1+\cos 80x\right)dx\ \int\left(1-\sin^2 40x\right)\mathrm{cos40x}\,dx\right)$$

Замена: $t=\sin 40x\to dt=40\cos 40xdx\to$ $\quad I=\dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{3}{40}\sin 40x+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{80}\sin 80x\right)+\dfrac{1}{40}\displaystyle\int\left(1-t^2\right)dt\right)$

$$I=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x-\frac{3}{40}\sin 40x+\frac{3}{160}\sin 80x+\frac{1}{40}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right)$$

$$I=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x-\frac{3}{40}\sin 40x+\frac{3}{160}\sin 80x+\frac{1}{40}\left(\sin 40x-\frac{\sin^3 40x}{3}\right)\right)$$

$$I=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{20}\sin 40x+\frac{3}{160}\sin 80x+\frac{1}{120}\sin^3 40x\right)+C$$

Интегралы не имеющие первообразных в элементарных функциях

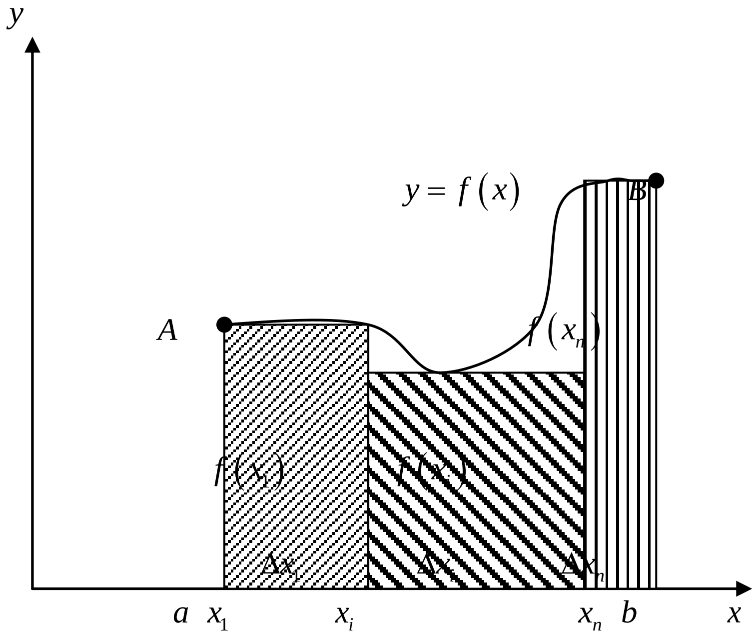
Интеграл вероятности: $I=\int e^{-x^2}dx$

Интегральный синус: $I=\int\frac{\sin x}{x}dx$

Интегральный косинус: $I=\int\frac{\cos x}{x}dx$

Понятие и геометрический смысл определённого интеграла.

Понятие определённого интеграла выведем на примере вычисления площади криволинейной трапеции.



Дано: $y = f(x)$-непрерывна на отрезке $[a,b]$

Определить: $SaABb-?$ $aABb-$криволинейная трапеция.

Решение.

Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей, длиной Δx_i. Через границы каждой части проводим прямые параллельные оси ординат, в результате чего криволинейная трапеция разбивается также на n частей. Внутри каждой части выбираем произвольную точку x_i и вычисляем значение функции выбранной точки $f(x_i)$. Площадь каждой части криволинейной трапеции приближённо заменяем площадью прямоугольника со сторонами Δx_i и $f(x_i)$. Тогда площадь каждой части $S_i \approx f(x_i)\Delta x_i$

Площадь всей криволинейной трапеции приближенно: $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$. Точное число получим, если число участков стремится к бесконечности: $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

Определение: Определённым интегралом называется предел, составленной интегральной суммы, если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точек внутри каждого участка.

Обозначение определённого интеграла: $S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, где $a,b-$нижняя верхняя границы отрезка интегрирования $[a,b]$ называемые нижним и верхним пределами интегрирования.

Свойства определённого интеграла.

1. Определённый интеграл от константы равен самой этой константе, умноженной на длину отрезка интегрирования.
$$\int_a^b cdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{a} c\Delta x_i = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{a}\Delta x_i = c(b-a)$$

2. Константу можно выносить за знак определённого интеграла.
$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} cf(x_i)\Delta x_i = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx$$

3. Определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов, вычисленных от каждой функции в отдельности.
$$\int_a^b \left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f_1(x_i)+f_2(x_i)\right]\Delta x_i =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_2(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

4. Если для двух функций выполняется следующее неравенство $f_1(x)\le f_2(x)$, то для определённых интегралов, вычисленных от этих функций на одном и том же отрезке интегрирования, выполняется тот же знак неравенства.

   Вычислим разность интегралов:
$$\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \overset{3\text{свойство}}{=} \overbrace{\int_a^b \underbrace{\left[f_2(x)-f_1(x)\right]}_{\ge 0}dx}^{\ge 0} \ge 0 \to \quad \int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$$

5. Оценка интеграла снизу и сверху.
   Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет соответственно $\min(m)$ и $\max(M)$ значения, то определённый интеграл лежит в следующих пределах:
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$
   По условию: $m\le f(x)\le M$. Вычислим определённый интеграл от каждой части этого неравенства.
$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b Mdx \to m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

6.Теорема о среднем.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$, то $\exists x_0 \in (a,b)$, в которой выполняется следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Доказательство:

По пятому свойству имеем $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. По свойствам непрерывных функций на отрезке, непрерывная функция на этом отрезке обязательно имеет $\min$ и $\max$ значение.

$$m \le f(x) \le M \to m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Всегда можно подобрать из бесчисленного множества значение $x \in [a,b]$ число x, при котором будут равны средние части этих неравенств.

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \to \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

7.При смене мест пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Это свойство следует из того, что для интеграла стоящего в правой части Δx будет отрицательный.

8.Разбиение отрезка интегрирования на части.

Для любых чисел a,b,c выполняется следующее неравенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

1 случай: $c \in (a,b)$, $n = n_1 + n_2$

●−−−●−−−−−−−−−●
a c b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n_1\to\infty}\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i)\Delta x_i + \lim_{n_2\to\infty}\sum_{i=1}^{n_2} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2 случай: $c \notin [a,b]$

●−−−●−−−−−−−−−●
a b c

по 1случаю: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx \to$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \underbrace{\int_b^c f(x)\,dx}_{7\,свойство} \to \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Определённый интеграл с переменным верхним пределом.

$$\int_a^t f(x)\,dx = I(t),\ a - const,\ t\text{-переменная},\ t \in [a,b].$$

Замечание: определённый интеграл с переменным верхним пределом является функцией этого верхнего предела.

Теорема: Определённый интеграл с переменным верхним пределом от функции $f(x)$ является первообразной от этой функции, т.е. $I(t) = F(t)$.

Доказательство.

требуется доказать, что $F'(t) = I'(t) = f(t)$

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta I}{\Delta t};\ \Delta I = I(t-\Delta t) - I(t) = \int_a^{t+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t f(x)\,dx + \int_a^{t+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \to$$

$$I'(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t_0)(t+\Delta t - t) = f(t_0)\Delta t.\ t_0 \in [t, t+\Delta t];\ \Delta t \to 0;\ t_0 \to t \Rightarrow I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f(t_0) = f(t)$$

Значит $I(t)$ является первообразной от $f(t)$, значит мы имеем бесчисленное множество первообразных отличающихся друг от друга на величину c, значит

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dt + c.$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Дано: $F(t) = \int_a^t f(x)\,dt + c$

Вычислим значение функции $F(t)$ на границах отрезка $[a,b]$.

$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} + c \to c = F(a)$$

Замечание: Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + F(a)$ $\to \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона-Лейбница.

Правило: Определённый интеграл на $[a,b]$ равен приращению первообразной на этом же отрезке.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Методы вычисления определённого интеграла.

Замена переменных

$$x = x(t) \to dx = x'(t)dt \to \int_a^b f(x)dx = \int_{t_н}^{t_в} f(x(t))x'(t)dt;$$

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обязательно меняются пределы интегрирования. Для нахождения новых пределов интегрирования $t_в, t_н$ необходимо подставить вместо x формулу замены $x = x(t)$ старые пределы интегрирования a, b., т.е. $a = x(t_н); b = x(t_в)$

Вычислим значение интегралов левой и правой части по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{t_н}^{t_в} f(x(t))x'(t)dt = F(x(t))\Big|_{t_н}^{t_в} = F(x(t_в)) - F(x(t_н)) = F(b) - F(a)$$

Получилось одно и тоже выражение, значит формула замены верна.

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обратная замена не осуществляется т.к. результатом этого интеграла является число.

Интегрирование по частям.

Вычислим дифференциал произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций: $d(uv) = vdu + udv$

Проинтегрируем левую и правую части: $\int_a^b d(uv) = uv = \int_a^b udv + \int_a^b vdu \to$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ - формула интегрирования по частям.

Определённый интеграл на отрезке симметричном относительно нуля.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \overset{8-е\,свойство}{=} \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\,dx}_{I_2} \to I = I_1 + I_2$$

Для того чтобы исследовать поведение интеграла на чётность и нечётность осуществим замену переменной.

$x = -t; dx = -dt;\ \ -a = -t_н \to t_н = a;\ \ 0 = t_в \to t_в = 0$, $\quad \to I_1 = -\int_{a}^{0} f(-t)dt$

1 случай: $f(x)$ - нечётная.

$I_1 = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \to I_1 = -I_2 \to I = 0 \to$ интеграл на отрезке симметричном относительно нуля от нечётной функции равен нулю.

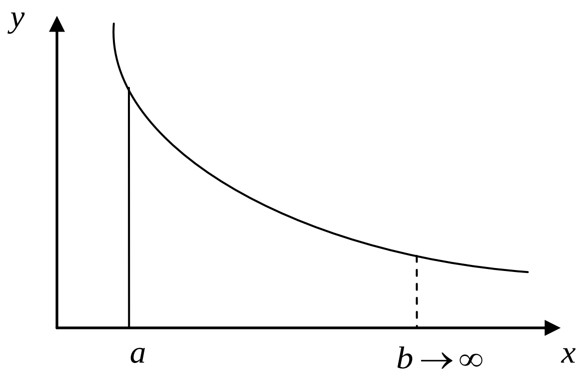
2 случай: $f(x)$ - чётная.

$I_1 = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \to I_1 = I_2 \to I = 2I_2 \to$ интеграл на отрезке симметричном относительно нуля от чётной функции равен двум интегралам на половинном отрезке.

Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования и теоремы сравнения для него.

Определение: Несобственный интеграл называется сходящимся, если результат его конечное число и расходящимся, если результат его бесконечен.

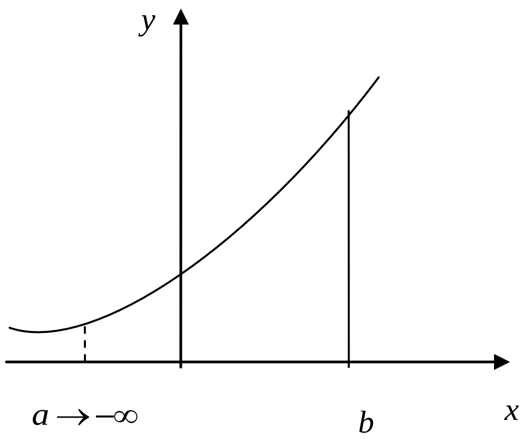
1 случай: $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$



Пример 1. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x}\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = -(0-1) = 1$$

2 случай: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$



3 случай: $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx + \int\limits_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)dx$

Теоремы сравнения.

Теорема 1: $\forall x \geq a$ для двух непрерывных функций выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, и несобственный интеграл $I_2 = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ - сходится, то сходится интеграл $I_1 = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, при чём $I_1 \leq I_2$

Пример 2. $I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2\left(2+e^{3x}\right)}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(2+e^{3x}\right)} < \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Из примера 1 сходится $I_2 = 1 \to$ по теореме 1 $I_1 \leq 1$ - сходится.

Теорема 2: Если $\forall \geq a$ для двух непрерывных функций выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и I_2- расходится, то расходится интеграл I_1

Пример 3. $I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \varphi(x); \quad I_2 = \int\limits_1^\infty \sqrt{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\lim_{b\to\infty} x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^b = \frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\left(b^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ теореме 2 $I_1 = \infty$ - расходится.

Теорема 3: Если $\forall x \geq a$ сходится интеграл от модуля функции, то сходится интеграл I_1

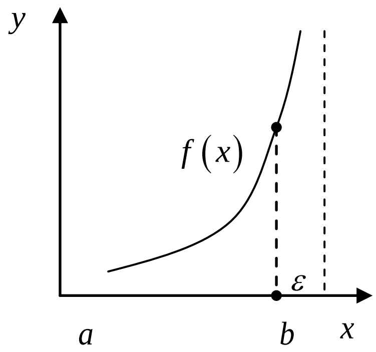
Пример 4: $I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

$I = \int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx \to |f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x) \quad \to I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 -$ сходится. $\to$ по теореме 1 сходится I $\to$ по теореме 3 сходится I_1

Несобственный интеграл от разрывной функции и теоремы сравнения для него.

Дано: Функция $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a,b]$ имеет точку c - т. разрыва 2 рода.

1 случай: $c=b$

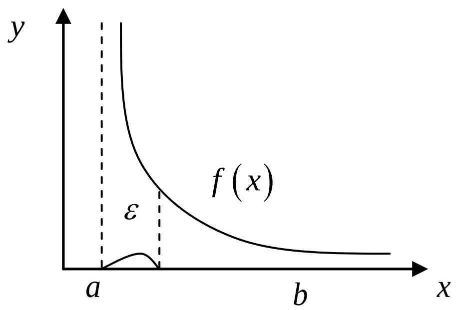


$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Пример 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

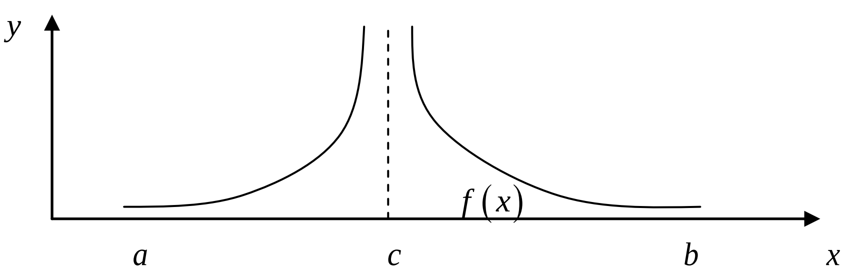
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\lim_{\varepsilon\to\infty}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right) = 2$$ - сходится.

2 случай $c=a$.



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

3 случай: $c\in(a,b)$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Пример 2. $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}x^{-2}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1}x^{-2}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0}^{1-\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\left(\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}_{=-\infty}+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{=-\infty}\right)=\infty-\text{расходится.}$$

Теоремы сравнения.

Теорема 1: Если a для двух функций является точкой разрыва и для этих функций выполняется неравенство $0\le f(x)\le\varphi(x)$, и несобственный интеграл $I_2=\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ - сходится, то сходится интеграл $I_1=\int\limits_a^b f(x)dx$, при чём $I_1\le I_2$

Пример 3. $I_1=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$

$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}<\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, т.к. $x^2<1,\forall x\in[0,1]\to$

из примера 1 $I_2=2\to$ по теореме 1 $I_1\le 2$ - сходится.

Теорема 2: Если a для двух функций является точкой разрыва и для этих функций выполняется неравенство $0\le\varphi(x)\le f(x)$ и I_2-расходится, то расходится интеграл I_1

Пример 4. $I_1=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2-1}dx$

$f(x)=\frac{1}{x^2-1}>\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\to$ из примера 2 $I_2=\infty\to$ по теореме 2 $I_1=\infty$ - расходится.

Теорема 3: Если a является точкой разрыва сходится интеграл от модуля функции, то сходится интеграл I_1

Пример 5: $I_1=\int\limits_0^1\frac{\sin 10x}{\sqrt{1-x}}dx$

$I=\int\limits_0^1\frac{|\sin 10x|}{\sqrt{1-x}}dx\to|f(x)|=\frac{|\sin 10x|}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\varphi(x)\quad\to I_2=\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=2-$ из примера 1 сходится $\to$ по теореме 1 сходится I $\to$ по теореме 3 сходится I_1