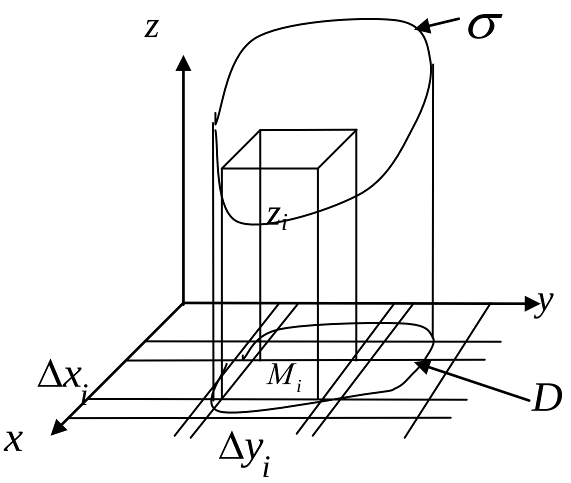
Кратные интегралы

Понятие двойного интеграла и его свойства.

Задача нахождения объёма тел.



Дано: цилиндрическое тело: верхнее основание поверхность $\sigma : z = f(x, y)$, нижнее основание плоскость $D = Пр_{xoy}\sigma$, боковая поверхность параллельна оси z.
Найти: объем тела: V
Решение: Область D разбивается на n частей, прямыми, параллельными осям x,y.

Каждая часть будет представлять собой прямоугольник со сторонами Δx_i, Δy_i. Площадь каждой части $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Внутри каждой части выбирается произвольная точка $M_i(x_i, y_i)$ и вычисляется значение z_i выбранной точки, то есть $f(x_i, y_i)$. Объём каждой части тела приближённо заменяем на объём параллелепипеда с площадью основания ΔS_i и высотой $z_i = f(x_i, y_i)$.

$$V_i \approx \Delta S_i f(x_i, y_i)$$

Замечание: Приближённое равенство объясняется тем, что поверхность σ совпадает с верхним основанием параллелепипеда только в одной точке и площадь ΔS_i на границе области D больше площади, которая относится к нижнему основанию тела.

Объём всего тела $V = \sum_{i=1}^{n} V_i \to V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$. (1)

Точное значение объёма тела получим в пределе $V = \lim_{i=1} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$

Определение: Двойным интегралом называется предел интегральной суммы (1) если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение двойного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{i=1} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i .$$

Свойства двойного интеграла:

1. Константу можно выносить за знак двойного интеграла

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Двойной интеграл от суммы двух функций равен сумме двойных интегралов от каждой из этих функций.

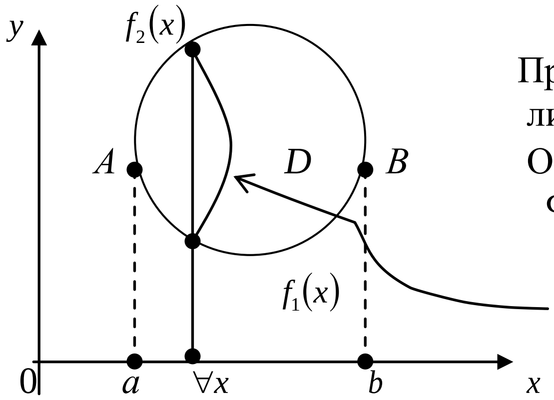
$$\iint_D \left[f_1(x,y) + f_2(x,y)\right]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

2. Если $D = D_1 + D_2$, то двойной интеграл по всей области равен сумме двойных интегралов по каждой из этих частей.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y) + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Понятие двукратного интеграла.

Определение: Область называется правильной, если любая прямая, проведённая через любую внутреннюю точку области, пересекает границу области только в 2-х точках.



Дано:

Правильная область *D*, образованная линиями: $x = a,\ x = b;\ y = f_1(x),\ y = f_2(x).$

Область *D* является областью определения Функции 2-х переменных: $z = f(x,y)$

отрезок интегрирования.

Выберем $\forall x \in [a,b]$ $(x - const)$. В этом случае функция 2-х переменных $f(x,y)$ превращается в функцию 1-го переменного y, от которой можно вычислить определённый интеграл на отрезке $[f_1(x), f_2(x)]$ (границы это отрезка числа, т.к функции при заданном значении аргумента принимают числовые значения).

$$\Phi(x) = \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \quad (1).$$

Полученную функцию $\Phi(x)$, как функцию одного аргумента *x* можно интегрировать на отрезке $[a,b]$: $I_D = \int\limits_a^b \Phi(x)dx \quad (2).$

Подставляем (1) в (2): $I_D = \int\limits_a^b \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx -$ двукратный интеграл.

Определение: Интеграл (1) называется внутренним, интеграл (2) – внешним.

Порядок вычисления двукратного интеграла.

1. Вычисляется внутренний интеграл, при этом переменная *x* считается константой.
2. От полученного выражения вычисляется внешний интеграл.

Пример:

$$I_D = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} (x^2 + y^2)dydx = \int\limits_0^1 \left(x^2 \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_0^{x^2} y^2 dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int\limits_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

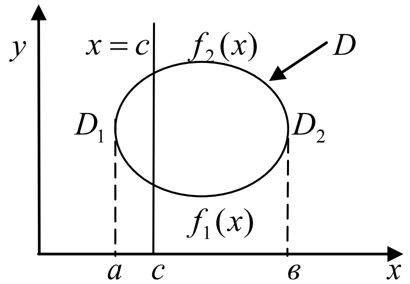
Свойства двукратного интеграла.

1 свойство: Двукратный интеграл по всей области D равен сумме двукратных интегралов по областям D_1,D_2, которые получаются, если разбить область D прямой параллельной одной из координатных осей, т.е.: $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$.

Доказательство:

1 случай: Область D разбивается на части прямой параллельной оси у.

$$I_D = \int_a^в \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx \quad (1)$$



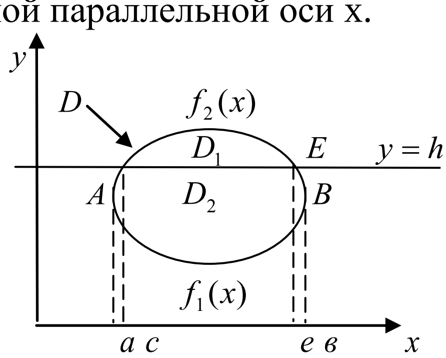
$D_1 : x = a, x = c$; $y = f_1(x), y = f_2(x)$

$D_2 : x = c, x = в$; $y = f_1(x), y = f_2(x)$

В двукратном интеграле (1) отрезок $[a,в]$ разобьём на две части $[a,c]$ и $[c,в]$, и внешний интеграл представляем в виде суммы двух интегралов.

$$I_D = \int_a^c \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx + \int_c^в \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx = I_{D_1} + I_{D_2} \text{, ч.т.д.}$$

2 случай: Область D разбивается на части прямой параллельной оси x.



$D_1 : x = c, x = e$; $y = h, y = f_2(x)$

$$ACEB : \psi(x) = \begin{cases} f_2(x), x \in [a,c] \\ h, x \in [c,e] \\ f_2(x), x \in [e,в] \end{cases}$$

$D_2 : x = a, x = в$; $y = f_1(x), y = \psi(x)$

Отрезок $[f_1(x), f_2(x)]$ разобьём на две части $[f_1(x), \psi(x)]$ и $[\psi(x), f_2(x)]$, и внутренний интеграл в двукратном интеграле (1) разобьём на сумму двух интегралов.

$$I_D = \underbrace{\int_a^в \int_{f_1(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx}_{I_{D2}} + \int_a^в \int_{\psi(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx$$

Разобьём отрезок $[a,в]$ на три части $[a,c]$, $[c,e]$, $[e,в]$ и внешний интеграл на сумму трёх интегралов.

$$I_D = I_{D2} + \underbrace{\int_a^c \int_{\xi(x)=f_2(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx}_{0} + \underbrace{\int_c^e \int_{\xi(x)=h}^{f_2(x)} f(x,y)dydx}_{I_{D1}} + \underbrace{\int_e^в \int_{\xi(x)=f_2(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx}_{0} = I_{D2} + I_{D1}$$

Замечание: Первый и третий интегралы равны нулю, т.к. у внутреннего интеграла верхние и нижние пределы равны.

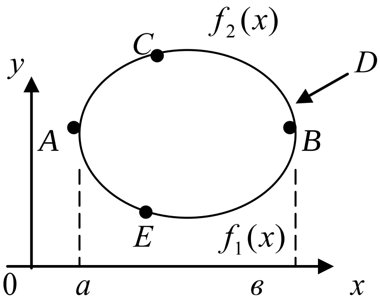
2 свойство: Если для функции $f(x,y)$ в области D площадью S m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значения этой функции, то двукратный интеграл лежит в следующих пределах $mS \le I_D \le MS$ (3).

Доказательство:

По свойству определённого интеграла внутренний интеграл для двукратного интеграла (1) лежит в следующих пределах

$$m\cdot\underbrace{\left[f_2(x)-f_1(x)\right]}_{\text{длина отрезка интегрирования}} \le \Phi(x) \le M\cdot\underbrace{\left[f_2(x)-f_1(x)\right]}_{\text{длина отрезка интегрирования}} \qquad (2)$$

Подставляем вместо внутреннего интеграла неравенство (2) в интеграл (1).



$$I_D \le \int_a^в M(f_2(x)-f_1(x))dx = M\int_a^в (f_2(x)-f_1(x))dx \to$$

$$I_D \le M\left[\int_a^в f_2(x)dx + \int_a^в f_1(x)dx\right] = M\left[S_{ACB}-S_{AEB}\right] = M\cdot S$$

3 свойство: Если функция $f(x,y)$ является непрерывной функцией в области D площадью S, то $\exists M(x,y)\in D$ двукратный интеграл вычисляется по формуле $I_D = f(x,y)\cdot S$.

Доказательство:

Если функция непрерывна в области D, то она обязательно имеет в этой области наименьшее и наибольшее значение:

$$m \le f(x,y) \le M \quad (x,y\in D) \quad (4)$$

Разделим все части неравенства (3) на площадь S.

$$m \le \frac{I_D}{S} \le M \quad (5)$$

Левая и правая части неравенства (4,5) равны, значит всегда можно подобрать такие $x,y\in D$, при которых будут совпадать и средние части этих неравенств:

$$f(x,y) = \frac{I_D}{S} \to I_D = f(x,y)S$$

Вычисление двойного интеграла.

Теорема: Двойной интеграл от функции $f(x)$ по правильной области D равен двукратному интегралу, вычисленному от той же функции по той же области.

Доказательство:

Разобьём область D прямыми, параллельными координатным осям на n частей площадью $\Delta S_i = \Delta x_i \times \Delta y_i$. Для каждой части вычислим двукратный интеграл, используя 3-е свойство:

$$I_{D_i} = f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Двукратный интеграл по всей области D вычислим, используя 1-е свойство: $I_D = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{D_i}$.

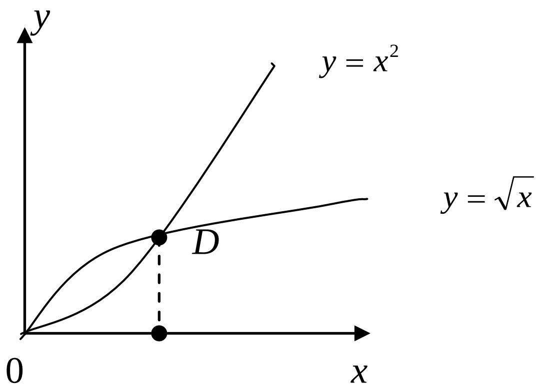
Вычислим пределы левой и правой частей:

$$\lim_{n\to\infty} I_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i; \quad I_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i .$$

Предел правой части по определению является двойным интегралом:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx$$

Пример: $\iint\limits_D (x+y)dxdy = I; \quad D: y = x^2,\ x = y^2.$



$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)dydx = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right)dx = \left(\frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = 0{,}3.$$

Замена переменных в двойном интеграле, вычисление в полярной системе координат.

Замена переменных осуществляется по формуле Остроградского

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x^*,y^*)\left|I\right|dudv,$$

где D^* – это та же по форме область D, но заданная линиями в новой системе координат u,v, x^*,y^* – функции связи старой и новой системы координат $x = x^*(u,v)$, $y = y^*(u,v)$

I – Якобиан: $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial u} & \frac{\partial x^*}{\partial v} \\ \frac{\partial y^*}{\partial u} & \frac{\partial y^*}{\partial v} \end{vmatrix}$

Определение: Якобианом называется определитель, составленный из частных производных первого порядка.

Замечание: Порядок Якобиана определяется числом аргументом функции.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

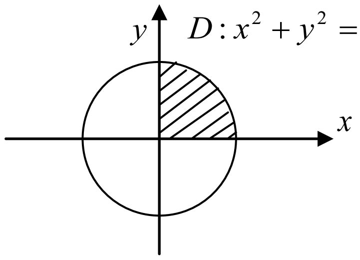
$$x = r\cos\varphi = x^*,\quad y = r\sin\varphi = y^*,\qquad u = \varphi, v = r$$

$$\to I = \begin{vmatrix} -r\sin\phi & \cos\phi \\ r\cos\phi & \sin\phi \end{vmatrix} = -r\sin^2\phi - r\cos^2\phi = -r$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rd\phi dr$$

Замечание: Полярная система координат применяется, если область D - круг или часть его.

Пример:



$$\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint\limits_{D^*} e^{-r^2} r d\phi dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 re^{-r^2}drd\phi = I$$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2 p + r^2\sin^2 p$$

$$x^2+y^2=r^2$$

Замена: $t=-r^2; dt=-2rdr \Rightarrow dr = -\dfrac{dt}{2r}$ $\quad t_н = 0 \quad t_в = -1$

$$I = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{-1} re^t \frac{dt}{-2r}d\phi = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{-1} e^t dt d\phi = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \Big|_0^{-1} d\phi = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-1}-1)d\phi = 2(1-\frac{1}{e})\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(e-1)}{e}.$$

Обобщенная полярная система координат

Замечание: Обобщенная полярная система координат применяется, если область D - эллипс или часть его.

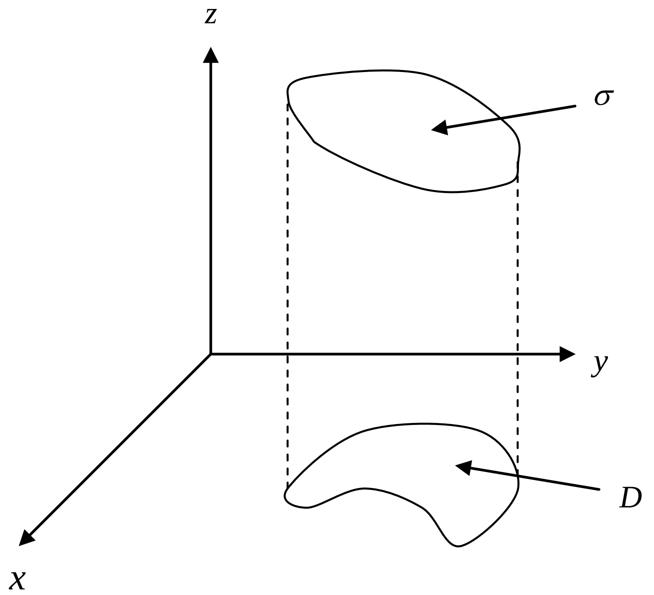
$$x = ar\cos\phi = x^*, \quad y = br\sin\phi = y^*, \qquad u=\varphi, v=r$$

$$\to I = \begin{vmatrix} -ar\sin\phi & a\cos\phi \\ br\cos\phi & b\sin\phi \end{vmatrix} = -abr\sin^2\phi - abr\cos^2\phi = -abr$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D^*} f(ar\cos\phi, br\sin\phi) r d\phi dr$$

Вычисление объёма тела через двойной интеграл.

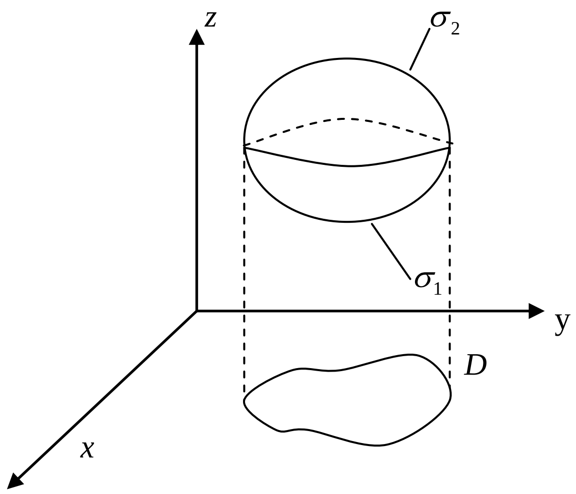
1 случай: Цилиндрическое тело.



$$\sigma : z = f\left(x, y\right)$$

$$V = \iint\limits_D f\left(x, y\right)dxdy$$

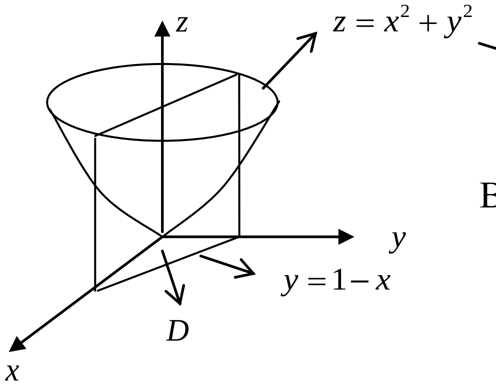
2 случай: Тело, образованное пересечением 2-х поверхностей.



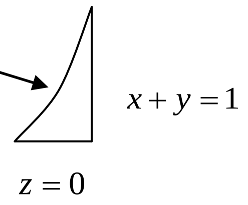
$$\begin{matrix} \sigma_2 : z = f_2(x, y) \\ \sigma_1 : z = f_1(x, y) \end{matrix}; \quad V = V_2 - V_1, \quad V = \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy - \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy,$$

$$V = \iint\limits_D \left[f_2(x, y) - f_1(x, y)\right]dxdy.$$

Пример: Найти объём: $V: z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ x + y = 1.$



Вид сбоку:



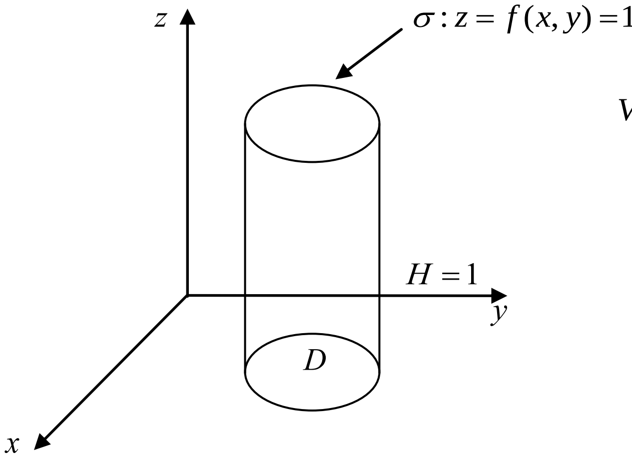
Решение:

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right)dydx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(3x^2 - 3x^3 + (1-x)^3\right)dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{(1-x)^4}{4} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

Вычисление площади плоской фигуры через двойной интеграл.

Рассмотрим прямой цилиндр единичной высоты

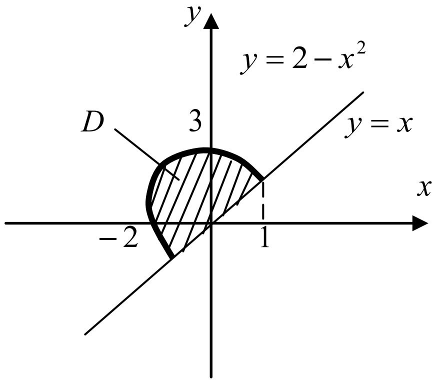


$$V = SH \to V = S$$

$$V = S = \iint\limits_D \underbrace{f(x,y)}_{1} dxdy \to$$

$$\to S = \iint\limits_D dxdy$$

Пример: $D: y = 2 - x^2; \quad y = x$



$$2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{3} = 1$$

$$x_2 = -2$$

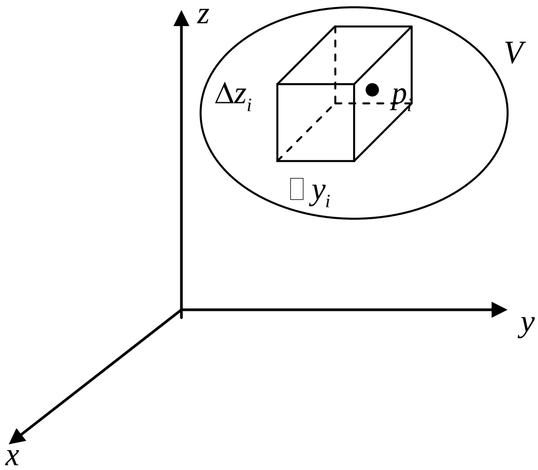
$$S = \iint\limits_D (dxdy) = \int\limits_{-2}^{1} \int\limits_{x}^{(2-x^2)} dydx = \int\limits_{-2}^{1} y \Bigg|_{x}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx$$

$$(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) \Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 4{,}5 \text{ м}^2$$

Понятие тройного интеграла и его свойства.

Задача на нахождение массы тела.



Дано: тело V, в каждой точке которого задана объёмная плотность материала $f(x,y,z)$ $\left(\frac{кг}{м^3}\right)$

Требуется определить массу: M.

Решение:

Область V разобьём на n - частей объёмом ΔV_i плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Заменим объём каждой части на объём параллелепипеда со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$:

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Внутри каждой части выбирается произвольная точка $P_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение функции плотности в этой точке $f(x_i, y_i, z_i)$ и предположим, что плотность во всех точках этой части одинакова и равна плотности выбранной точке.

Масса каждой части: $m_i \approx f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

Масса всего тела: $M \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \quad (1)$.

Точное значение массы получим в педеле: $M = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$

Определение: Тройным интегралом называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения области на части и выбора точки внутри каждой части.

Обозначение тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$$

Приложения тройного интеграла

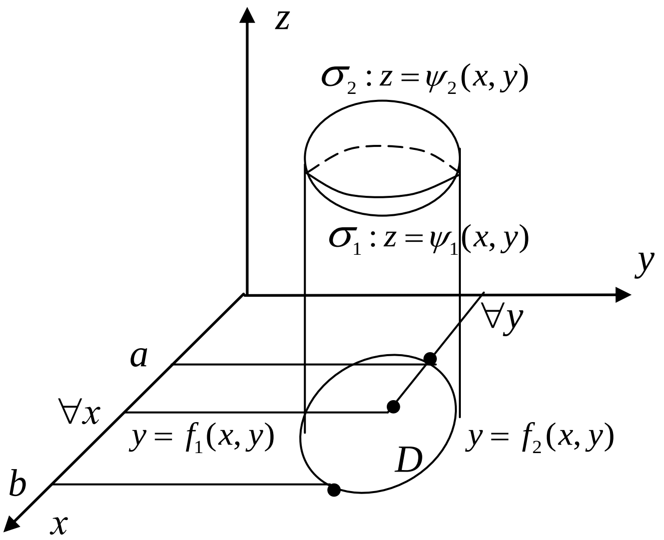
1. Масса тела: $M = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
2. Объем тела: $V = \iiint_V dxdydz$

Свойства тройного интеграла:

1. $\iiint_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
2. $\iiint_V [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz + \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$.
3. Если $V = V_1 + V_2$, то $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

Трёхкратный интеграл и его свойства, вычисление тройного интеграла.

Определение: Область V называется правильной, если любая прямая проведённая через любую внутреннюю точку в области пересекает границу области только в двух точках и область D так же является правильной областью.



Дано: правильная область V,
$D = Пр_{xoy}V$

Выберем $\forall x, y \in D$, тогда функция трёх переменных $f(x, y, z)$ станет функцией одного переменного z, от которой можно вычислить определённый интеграл на отрезке: $[\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$

$$\Phi(x, y) = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dxdydz$$

От функции двух переменных можно вычислить двойной интеграл:

$$I_V = \iint_D \Phi(xy) dxdy$$

От двойного интеграла можно вычислить двукратный.

Окончательно получим: $I_V = \int_a^в \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{\psi_1(xy)}^{\psi_2(xy)} f(x, y, z) dzdydx -$ трёхкратный интеграл.

Свойства трёхкратного интеграла.

1. Если область V разбить на части плоскостью параллельной какой-то координатной плоскости, то $I_V = I_{V1} + I_{V2}$
2. Если функция в области объёмом V имеет наименьшее m и наибольшее M, то $mV \leq I_V \langle MV$
3. Если функция в области объёмом V является непрерывной, то $I_V = f(x, y, z) \cdot V$

Вычисление тройного интеграла.

Теорема: Тройной интеграл от непрерывной $f(x, y, z)$ по правильной области V равен трёхкратному интегралу, вычисленному от той же функции по той же области.

Доказательство:

Разобьём область V на n частей плоскостями параллельными координатным. Для каждой части вычислим трёхкратный интеграл, используя третье свойство $I_{Vi} = f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

Трёхкратный интеграл по всей области вычисляем используя первое свойство:

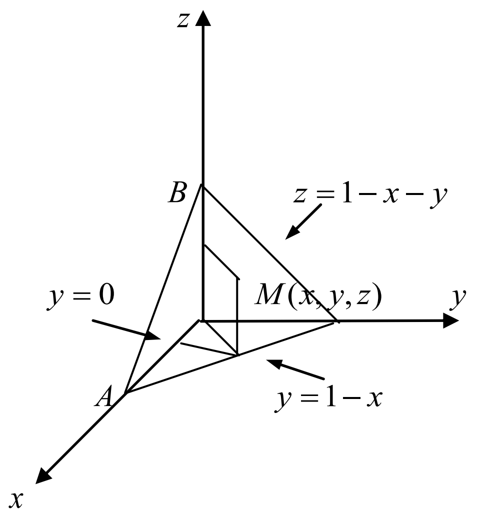
$$I_{Vi} = \sum_{i=1}^{n} I_{Vi}$$

Вычислим предел левой и правой частей:

$\lim\limits_{n\to\infty} I_V = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ $\quad I_V = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ – тройной интеграл

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^{в}\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)}\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx\,.$$

Пример: Найти массу тела $V: x+y+z=1\ (x=0, y=0, z=0)$. Если плотность пропорциональна квадрату расстояния от любой точки тела до оси z.



$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(x,y,z)=kr^2=k(x^2+y^2)$$

$$M=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}k(x^2+y^2)dzdydx=$$

$$=k\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)z\Big|_0^{1-x-y}dydx=$$

$$=k\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)(1-x-y)dydx=$$

$$=k\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2-x^3-x^2y+y^2-xy^2-y^3)dydx=$$

$$=k\int_0^1(x^2y-x^3y-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{xy^3}{3}-\frac{y^4}{4})\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=k\int_0^1(x^2(1-x)-x^3(1-x)-\frac{x^2}{2}(1-x)^2+\frac{1}{3}(1-x)^3-\frac{x}{3}(1-x)^3-\frac{1}{4}(1-x)^4)dx=$$

$$=k\left[\int_0^1(x^2-x^3-x^3+x^4-\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x}{3}+x^2-x^3+\frac{x^4}{3})dx+\frac{1}{3}\frac{(1-x)^4}{-4}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\frac{(1-x)^5}{-5}\Big|_0^1\right]=$$

$$=k\left[\int_0^1(\frac{5}{6}x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{3})dx+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right]=k(\frac{5}{6}\frac{x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}+\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{6})\Big|_0^1+\frac{1}{30}=$$

$$=k\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right]=\frac{k}{30}.$$

Замена переменных в тройном интеграле.

Осуществляется по формулам Остроградского:

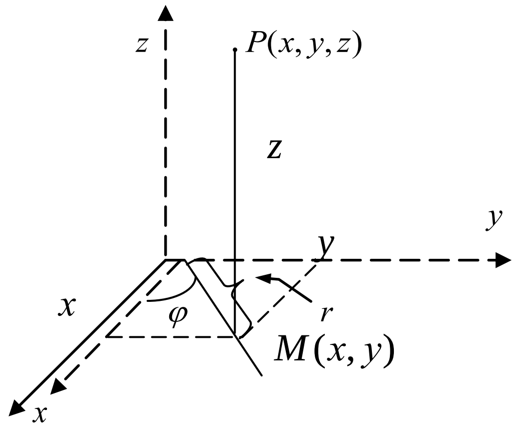
$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(x^*,y^*,z^*)|I|dUdVdW\ ,$$

где V^*- это та же по форме область V, но заданная в новой системе координат U,V,W.

$$\left.\begin{aligned} x &= x^*(U,V,W) \\ y &= y^*(U,V,W) \\ z &= z^*(U,V,W) \end{aligned}\right\} -$$ функции связи между старой и новой системы координат.

I – Якобиан:
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial U} & \frac{\partial x^*}{\partial V} & \frac{\partial x^*}{\partial W} \\ \frac{\partial y^*}{\partial U} & \frac{\partial y^*}{\partial V} & \frac{\partial y^*}{\partial W} \\ \frac{\partial z^*}{\partial U} & \frac{\partial z^*}{\partial V} & \frac{\partial z^*}{\partial W} \end{vmatrix}$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.



$r-$ полярный радиус

$x = r\cos\varphi = x^*$

$y = r\sin\varphi = y^*$

$z^* = z$

$U = \varphi \quad V = r \quad W = z$

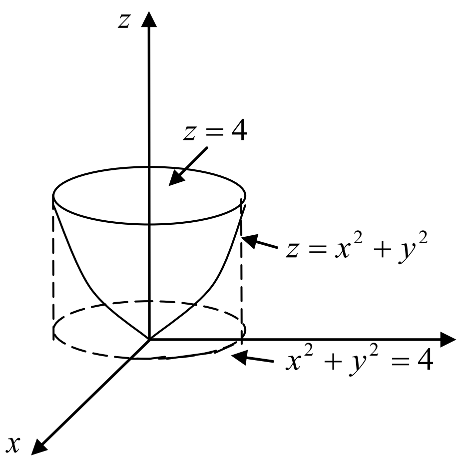
$$I = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz$$

Замечание: Цилиндрическая система координат применяется, если проекция области V на плоскость $xoy-$ круг или часть его.

Пример: Найти объём тела $V: z = x^2 + y^2 \ : z = 4$



$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^*} rd\varphi drdz =$$

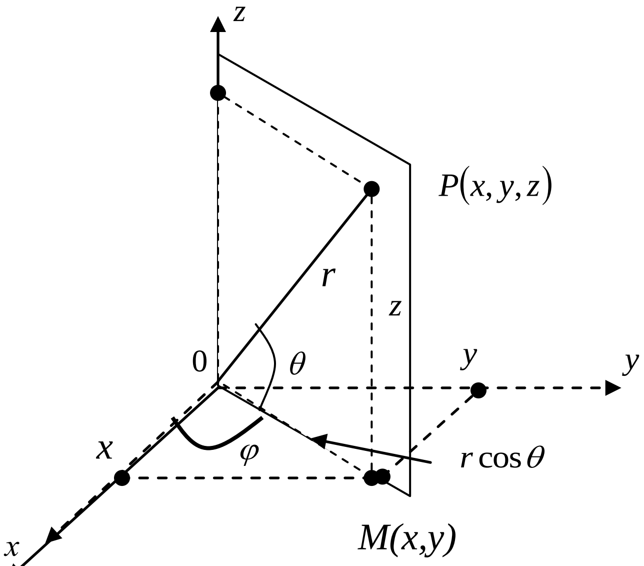
$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \int_{x^2+y^2=r^2}^4 rdzdrd\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 rz\Big|_{r^2}^4 drd\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4r - r^3)drd\varphi = 4\int_0^{\pi/2}(2r^2 - \frac{2^4}{4})\Big|_0^2 =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}(8-4)d\varphi = 16\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 8\pi$$

Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

$$z = r\sin\theta = z^*$$
$$OM = r\cos\theta$$
$$x = r\cos\phi\cos\theta = x^*$$
$$y = r\sin\phi\cos\theta = y^*$$
$$U = \phi,\ V = r,\ W = \theta$$



$$I = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = -\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} +$$

$$+r\cos\theta\cdot\begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = -\sin\theta r\cos\theta(-r\sin\theta)\underbrace{\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}}_{-1} + r\cos\theta r\cos\theta\cos\theta\underbrace{\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}}_{-1} =$$

$$= -r^2\cos\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -r^2\cos\theta$$

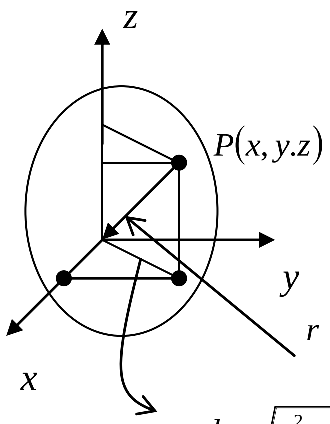
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f\left(r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\right)r^2\cos\theta\, d\phi dr d\theta$$

Замечание: Сферическая система координат применяется, если область V- шар или часть его.

Пример: Найти массу 1/8 шара радиуса R, если плотность пропорциональна расстоянию от любой точки тела до начала координат.

Плотность: $f(x,y,z) = kr = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta =$$
$$= r^2\left[\cos^2\theta\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)+\sin^2\theta\right] = r^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = r^2$$



$$M = \iiint\limits_V k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = k\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{\pi/2} r^3\cos\theta\,d\theta\,dr\,d\varphi =$$
$$= k\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^2\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} dr\,d\varphi = k\int_0^{\pi/2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\varphi = \frac{kR^4}{4}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\pi R^4}{8}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$d = \sqrt{x^2+y^2}$