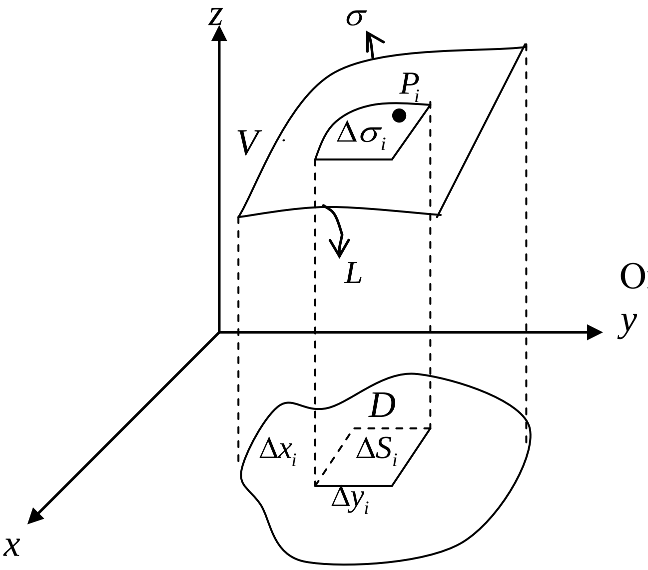
Поверхностные интегралы

Площадь поверхности.



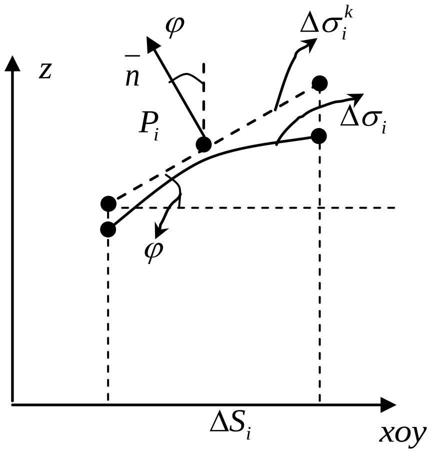
Дано:
Поверхность
$\sigma : z = f(x, y)$,
ограниченная
замкнутой линией L.
Определить площадь поверхности σ

Решение

Построим $D = Пр_{xoy}\sigma$. Разобьём σ на n-частей площадью $\Delta\sigma_i$ плоскостями параллельными координатным плоскостям xoz, yoz. Тогда: $\Delta S_i = Пр_{xoy}\Delta\sigma_i$. Площадь каждой части: $\Delta S_i = Пр_{xoy}\Delta\delta_i$; $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$.

Выберем на участке $\Delta\sigma_i$ произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и проведём через неё касательную плоскость к поверхности σ . На этой плоскости выделим участок площадью $\Delta\sigma_i^к$ так, чтобы $\Delta S_i = Пр_{xoy}\Delta\sigma_i^k$

Площадь участка поверхности приближённо заменим на площадь участка касательной плоскости, т.е. $\Delta\sigma_i \approx \Delta\sigma_i^k$



Из рисунка видно, что: $\Delta\sigma_i^k = \dfrac{\Delta S_i}{\cos\varphi}$.

Составим уравнение нормали к поверхности в точке P_i:

$$\frac{x - x_i}{-\dfrac{\partial t}{\partial x}} = \frac{y - y_i}{-\dfrac{\partial t}{\partial y}} = \frac{z - z_i}{1}$$

Из этого уравнения составим координаты направляющего вектора нормали $\overline{n}$:

$$\overline{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Направляющий косинус вектора определяется отношением соответствующей координаты вектора к его длине:

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3).$$

Подставляем (3) в (2): $\Delta\sigma_i^k = \Delta S_i \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (4).$

Подставляем (4) в (1): $\Delta\sigma_i \approx \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\Delta S_i$.

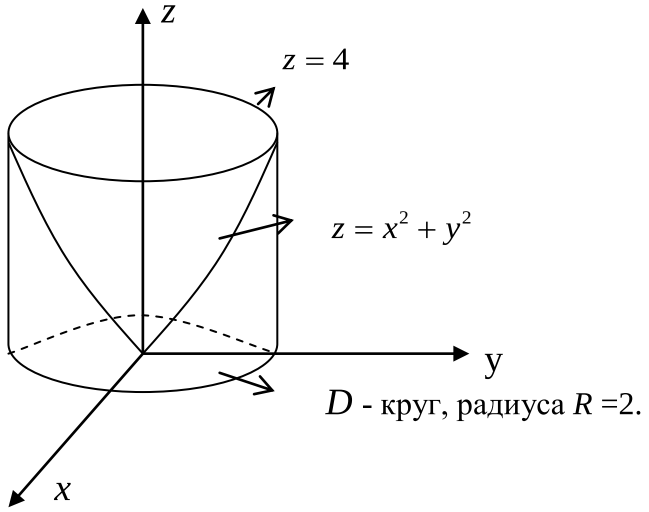
Площадь всей поверхности: $\sigma \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\Delta x_i \Delta y_i$

Точное значение получается в пределе:

$\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\Delta x_i \Delta y_i$ - по определению – двойной интеграл.

$$\sigma = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\,dxdy$$

Пример: Вычислить боковую поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$ ограниченного плоскостью $z = 4$.

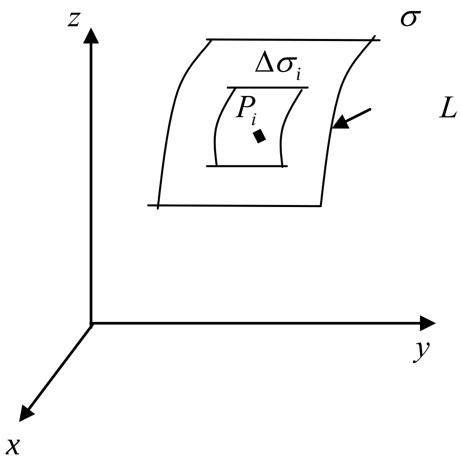


$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y;\quad \sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \begin{pmatrix} \textit{переход}\ \text{в полярную} \\ \text{системы координат} \end{pmatrix} = 4\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4r^2}\,r d\phi dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \textit{замена}: t = 1+4r^2, \\ dt = 8rdr \to dr - \dfrac{dt}{8r} \end{pmatrix} = 4\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_1^{17} \sqrt{t}\,r\frac{dt}{8r}d\phi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{17} d\phi = \frac{1}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right)\phi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Поверхностный интеграл первого рода. Его вычисления и приложения.

Задача нахождения массы поверхности.



Дано: поверхность $\sigma : z = f(x, y)$, ограниченная линией L.

В каждой точке поверхности известна поверхностная плотность материала $F(x, y, z) \cdot \left(\frac{k^2}{M^2} \right)$.

Определить массу поверхности σ.

Решение: Разобьем σ на n частей площадью $\Delta\sigma_i$. Внутри каждой части выбираем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и считаем плотность на всём участке постоянной равной значению плотности в выбранной точке, то есть $F(x_i, y_i, z_i)$.

Масса каждого участка $m_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\delta_i$,

масса всей поверхности $M \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\delta_i$.(1)

Точное значение массы получим в пределе $M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\delta_i$.

Определение: Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения на части и выбора точки внутри каждой части.

Обозначение поверхностного интеграла первого рода.

$$\iint_{\delta} F(x, y, z) d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \quad (2)$$

Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

$$\Delta\sigma_i \approx \Delta\sigma_i^k \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_i \quad (3)$$

Подставляем $\Delta\sigma_i$ из формулы (3) в (2) и функцию F вместо z_i в уравнение поверхности σ, то есть $z_i = f(x_i, y_i)$.

$\iint\limits_{\sigma} F(x,y,z)dz = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} F(x_i, y_i\, f(x_i, y_i))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\Delta x_i \Delta y_i$ - по определению двойной интеграл. Окончательно формула вычисления:

$$\iint\limits_{\sigma} F(x,y,z,)d\sigma = \iint\limits_{D} F(x,y,d(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

Приложения:

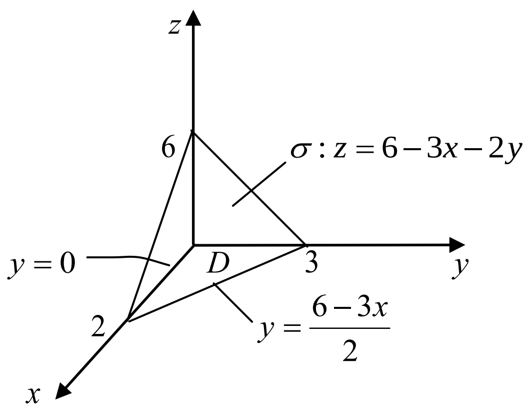
1. Масса поверхности: $M = \iint\limits_{\delta} F(x,y,z)d\sigma$
2. Площадь поверхности σ: $\sigma = \iint\limits_{\delta} d\sigma$.

Пример: $\iint\limits_{\delta} (x+y+z)d\delta = I$,

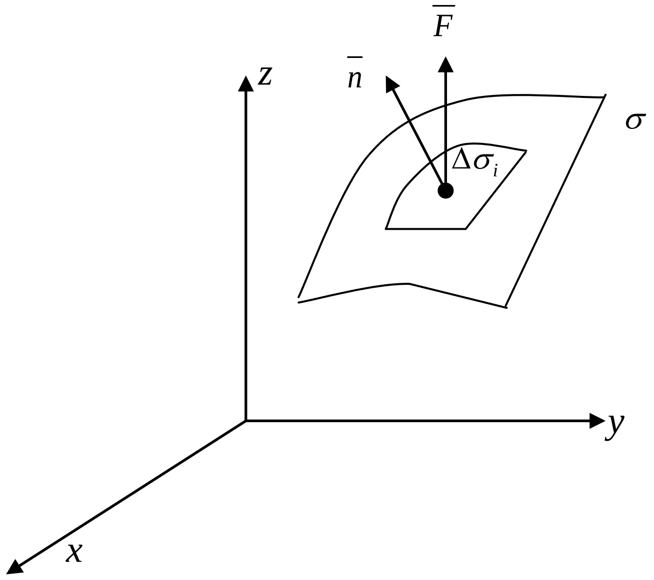
где $\sigma: 3x+2y+z=6$, ограниченная плоскостями: $x=0, y=0, z=0$

$$I = \iint\limits_{D}(x+y+6-3x-2y)\sqrt{1+9+4}dxdy =$$

$$= \sqrt{14}\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\frac{3}{2}(2-x)} (6-2x-y)dydx$$



Поверхностный интеграл второго рода и его физический смысл.



Дано: поверхность σ: $z = f(x, y)$, к каждой точке которой приложено два вектора:
$(1)\ \overline{F} = X(x, y, z)_{\bar{i}} + Y(x, y, z)_{\bar{j}} + Z(x, y, z)_{\bar{k}}$, $(2)\ n \perp \sigma;\ \overline{n} = \cos(\overline{n} \wedge x)_{\bar{i}} + \cos(\overline{n} \wedge y)_{\bar{j}} + \cos(\overline{n} \wedge z)_{\bar{k}}$
.

Замечание: координаты второго вектора равны направляющим косинусам нормали поверхности.

Решение

Разбиваем поверхность σ на n - частей площадью $\Delta\sigma_i$. Внутри каждой части выбираем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ к которой приложим вектора (1) и (2). Будем считать, что вектора (1) и (2) не меняют ни направление, ни модуль в пределах каждой части. Составим интегральную сумму: $\sum_{i=1}^{n} (\overline{F}, \overline{n}) \Delta\sigma_i$ (3)

Определение: Поверхностным интегралом 2-го рода или потоком вектора называется предел интегральной суммы (3), если этот предел не зависит от способа разбиения на части и выбора точки внутри каждой части.

Обозначение потока вектора:

$$\iint\limits_{\sigma}(\overline{F},\overline{n})d\sigma_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\overline{F},\overline{n})\Delta\sigma_i \quad (4)\text{-сокращённая запись.}$$

Вычислим скалярное произведение векторов в формуле (4), как сумму произведений соответствующих координат векторов (1) и (2).

$$\iint\limits_{\sigma}\left[X(x,y,z)\cos(\overline{n}\wedge x)+Y(x,y,z)\cos(\overline{n}\wedge y)+Z(x,y,z)\cos(\overline{n}\wedge z)\right]d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i,y_i,z_i)\cos(\overline{n}\wedge x)+\right.$$
$$\left.+Y(x_i,y_i,z_i)\cos(\overline{n}\wedge y)+Z(x_i,y_i,z_i)\cos(\overline{n}\wedge z)\right]\Delta\sigma_i$$

Заменим: $\Delta\sigma_i\approx\Delta\sigma_i^{\,k}=\dfrac{\Delta x_i\Delta y_i}{\cos\phi}\to \begin{array}{l}\Delta\sigma_i\cos(\overline{n}\wedge z)\approx\Delta x_i\Delta y_i\\ \Delta\sigma_i\cos(\overline{n}\wedge y)\approx\Delta x_i\Delta z_i\\ \Delta\sigma_i\cos(\overline{n}\wedge x)\approx\Delta y_i\Delta z_i\end{array}$

$$\iint\limits_{\sigma}\left[X(x,y,z)dydz+Y(x,y,z)dxdz+Z(x,y,z)dxdy\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i,y_i,z_i)dy_idz_i+Y(x_i,y_i,z_i)dx_idz_i+Z(x_i,y_i,z_i)dx_id\,y_i\right] (5)$$

(5) - развёрнутое обозначение потока вектора.

Физический смысл потока вектора.

Если вектор $\overline{F}$ обозначает скорость движения жидкости, то поток вектора определяет количество жидкости протекающее через поверхность σ в единицу времени.

<u>Вычисление поверхностного интеграла второго рода.</u>

Разобьём предел правой части формулы (5) на сумму трёх пределов:

$$\iint\limits_{\delta}(\overline{F},\overline{n})d\delta=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}X(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i\Delta z_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Y(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta z_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Z(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta y_i$$

Первый предел: вместо x необходимо подставить функцию $f_1(y,z)$, которая получается из заданного уравнения.
(Например: $\sigma: x+y+z=1 \ \to x=1-y-z=f_1(y,z)$).

Второй предел: заменим y на $f_2(x,z)$.

Третий предел: заменим z на $f_2(x,y)$.

$$\iint\limits_{\sigma}(\overline{F},\overline{n})d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}X(f_1(y_i,z_i),y_i,z_i)\Delta y_i\Delta z_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Y(x_i,f_2(x_i,z_i),z_i)\Delta x_i\Delta z_i+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Z(x_i,y_i,f_3(x_i,y_i))\Delta x_i\Delta y_i$$

Каждый из этих пределов по определению является двойным интегралом.

Анализ знаков

Произведения приращений, например: $\Delta x_i \Delta y_i = \Delta\sigma_i \cos(\overline{n} \wedge z)$.

Если угол $\overline{n} \wedge z$ острый, то $\cos$ положительный.

Если угол $\overline{n} \wedge z$ тупой, то $\cos$ отрицательный.

Значит, в каждом пределе произведение приращений имеет знаки $\oplus$ или $(-)$, значит, каждый из двойных интегралов так же имеет знаки $\oplus$ или $(-)$.

$$\iint\limits_{\delta}\left[X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy\right] = \pm\iint\limits_{Dyoz} X(f_1(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm\iint\limits_{Dxoz} Y(x,f_2(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{Dyoz} Z(x,y,f_3(x,y))dxdy.$$

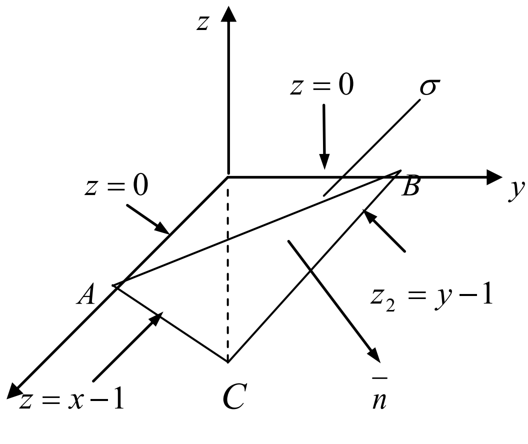
Определение областей интегрирования

Соответственно область D определяется, как проекция поверхности σ на ту координатную плоскость, которая находится по переменным, стоящим в произведении дифференциалов.

Замечание: Для определения знака, необходимо задавать на какой поверхности внешней или внутренней приложены вектора $\overline{F}$ и $\overline{n}$.

Соответственно ось, с которой ищется угол, определяется для каждого двойного интеграла, как недостающую координату произведения дифференциалов.

Пример: Вычислить поток вектора $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через внешнюю поверхность $\sigma: x + y - z = 1$, ограниченную координатными плоскостями.



$Dyoz = \Delta COB$.

$$\iint\limits_{\sigma}\left[xdydz + ydxdz + zdxdy\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$+\iint\limits_{Dyoz}(\underbrace{1-y+z}_{x})dydz = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y-1}^{0}(1-y+z)dzdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\left((1-y)z + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{y-1}^{0} = \int\limits_{0}^{1}\left((y-1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2}\right)dy = \ x$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}(y-1)^2\,dy = \frac{1}{2}\frac{(y-1)^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{6}(0-(-1)) = \frac{1}{6}$$

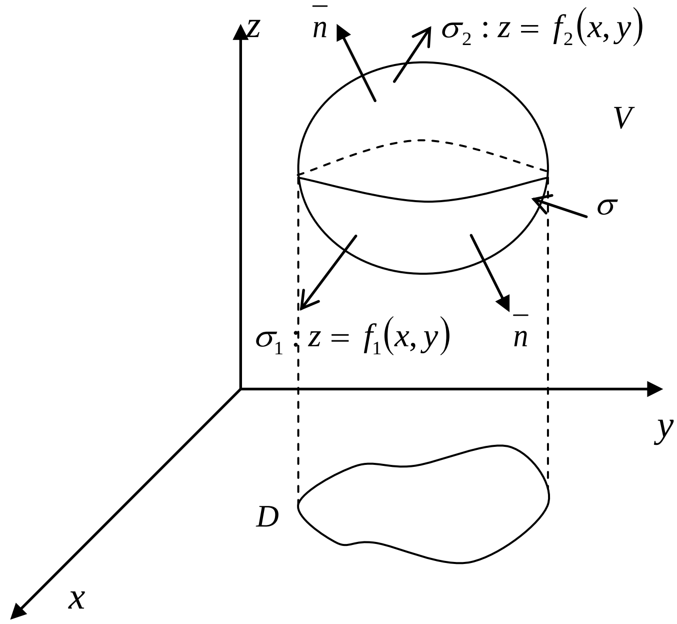
$$+\iint\limits_{Dxoz}(\underbrace{1-x+z}_{y})dxdz = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x-1}^{0}(1-x+z)dzdx = \frac{1}{6} \quad ; \qquad Dxoz = \Delta COA$$

$$-\iint\limits_{Dxoy}(\underbrace{1+x+y}_{z})dxdy = -\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x}(1+x+y)dydx = -\int\limits_{0}^{1}\left((1+x)y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1-x}dx = -\int\limits_{0}^{1}\left((1-x^2) + \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx =$$

$$= -\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{-6}\right)\Bigg|_{0}^{1} = -\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{6} \quad ; \qquad Dxoy = \Delta BOA$$

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода по формуле Остроградского.

Замечание: эта формула применяется для вычисления потока вектора через замкнутую поверхность.



Дано: Область V, образованная замкнутой поверхностью σ, в которой непрерывны функции: $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ и непрерывны их частные производные.

Найти: $\iint\limits_{\sigma}(\overline{F},\overline{n})d\sigma = ?$

Решение:

Рассмотрим: $D = \textit{Пр}_{xoy}V$ и вычислим тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V}\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}dZ(x,y,z)\right)dxdy = \iint\limits_{D}Z(x,y,z)\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D}Z\left(x,y,f_2(x,y)\right)dxdy - \iint\limits_{D}Z\left(x,y,f_1(x,y)\right)dxdy$$

Заменим двойные интегралы на соответствующие им поверхностные интегралы: $\iint\limits_{\sigma}Z(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\sigma}Z(x,y,z)dxdy$;

Если $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, то $\iiint\limits_{V}\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{\sigma}Z(x,y,z)dxdy \ (1)$.

Аналогично вычислить тройные интегралы от частных производных функции X, Y.

$$\iiint_V \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \iint_\sigma X(x,y,z)dydz \ (2), \quad \iiint_V \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \iint_\sigma Y(x,y,z)dxdz \ (3).$$

Сложим почленно формулы (1), (2), (3) с учётом того, что сумма интегралов равна интегралам суммы.

$$\iint_\sigma \left[X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy\right] = \iiint_V \left[\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}\right] dxdydz \ (4)$$

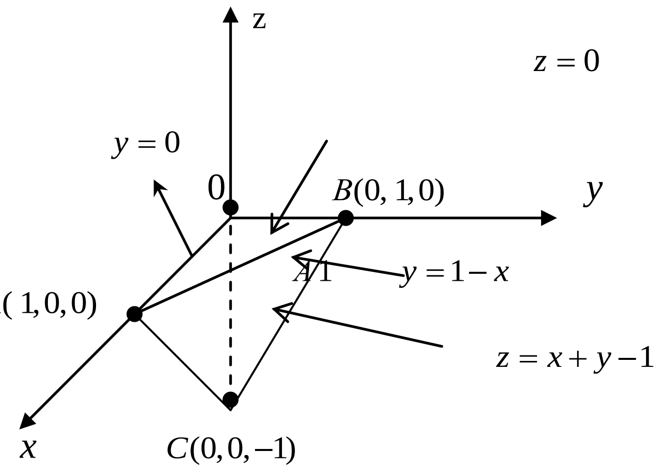
Формула (4) является формулой Остроградского.

Введём понятие дивергенция вектора: $div\overline{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$.

$\iint_\sigma \left(\overline{F}, \overline{n}\right) d\sigma = \iiint_V div\overline{F} dxdydz \ (5)$-сокращённая формула Остроградского.

Пример:

Вычислить поток вектора $\overline{F} = xy_i - yz_j + xz_k$ через всю поверхность $\sigma: x + y - z,\ x = 0, y = 0, z = 0.$



$$\frac{\partial X}{\partial x} = y, \frac{\partial Y}{\partial y} = -z, \frac{\partial Z}{\partial z} = x \quad \iint_\sigma \left(\overline{F}, \overline{n}\right) d\sigma = \iiint_V (y - z + x)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+y-1}^{0} (y + x - z)\, dzdydx =$$

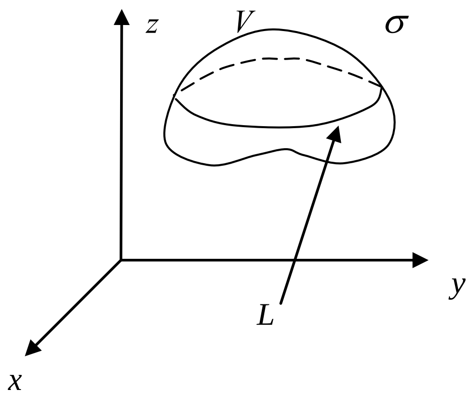
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y)z - \frac{z^2}{z}\right]\Big|_{x+y-1}^{0} dydx = -\int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y)^2 - (x+y) - \frac{((x+y)-1)^2}{2}\right] dydx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y-1)[2x+2y-x-y+1] = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-ч} ((x+y)-1)((x+y)-1)dydx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} ((x+y)^2 - 1)dydx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+y)^3}{3}\Big|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - x^3 - 3 + 3x}{3} dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \left(-x^3 + 3x - 2\right)dx = -\frac{1}{6}\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Понятие ротора.



Дано: замкнутая поверхность σ, на которой расположена замкнутая линия L. Область V, образованная поверхностью σ, является области определения непрерывных функции X, Y, Z, имеющих непрерывные частные производные.

Найти: циркуляцию вектора
$\overline{F} = X(x, y.z)\overline{i} + Y(x, y, z)\overline{j} + \overline{Z}(x, y, z)\overline{k}$
по замкнутой линии L, т.е. $\oint\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = ?$,
где $dr = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}$

Решение:

Вычислим циркуляцию для частного случая направления вектора $\overline{F} \,//\, OX$, то есть $\overline{F} = X(x, y, z)\overline{i}$. Тогда циркуляцию для этого вектора можно вычислить по формуле Грина: $\oint\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = \iint\limits_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy$

$$Y = 0 \to \oint\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = -\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy \qquad (1)$$

Поверхность $\sigma : z = f(x, y) \to X(x, y, f(x, y))$ - сложная функция, значит, эту функцию надо дифференцировать, как сложную функцию нескольких переменных:

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1)

$$\oint\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = -\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy - \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dxdy$$

Каждый из этих двойных интегралов можно заменить на поверхностный интеграл второго рода, с учёт, что $dxdy = d\sigma \cos(\overline{n} \wedge z)$:

$$\oint\limits_L (\overline{F}, d\overline{r}) = -\iint\limits_\delta \frac{\partial X}{\partial y} \cos(\overline{n} \wedge z) d\sigma - \int \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\overline{n} \wedge z) d\sigma \qquad (3)$$

Координаты нормального вектора $\overline{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right)$

Вычислим направляющие косинусы нормали с осями y и z.

$$\cos(\bar{n}\wedge y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{|\bar{n}|} \quad (4) \qquad \cos(\bar{n}\wedge z) = \frac{1}{|\bar{n}|} \quad (5)$$

Разделим почленно (4) на (5):

$$\frac{\cos(\bar{n}\wedge y)}{\cos(\bar{n}\wedge z)} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

Подставляем (6) в (3):

$$\oint\limits_L (\bar{F}, d\bar{r}) = -\iint\limits_\delta \frac{\partial X}{\partial y}\cos(\bar{n}\wedge z)d\sigma + \iint\limits_\delta \frac{\partial X}{\partial z}\cos(\bar{n}\wedge y)d\sigma = \oint\limits_L Xdx \qquad (7)$$

Аналогично можно вычислить циркуляцию для остальных случаев вектора $\bar{F}$, то есть $\bar{F} = Y\bar{j}$; $\bar{F} = Z\bar{k}$

$$\oint\limits_L Ydy = -\iint \frac{\partial Y}{\partial z}\cos(\bar{n}\wedge x)d\sigma + \iint\limits_\delta \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(\bar{n}\wedge z)d\sigma \qquad (8)$$

$$\oint\limits_L Zdz = -\iint\limits_\delta \frac{\partial Z}{\partial x}\cos(\bar{n}\wedge y)d\sigma + \iint\limits_\delta \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(\bar{n}\wedge x)d\sigma \qquad (9)$$

Складываем почленно (7,8,9) с учётом того, что сумма интегралов равна интегралу суммы:

$$\oint\limits_L \left[Xdx + Ydy + Zdz \right] =$$

$$= \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n}\wedge x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n}\wedge y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\bar{n}\wedge z) \right] d\sigma \qquad (10)$$

Формула (10) является развёрнутой формулой Стокса. Если вектор $\bar{F}$ не зависит от третьей координаты Z, то формула Стокса превращается в формулу Грина.

Понятие ротора.

Определение: Ротором называется вектор следующего вида

$$rot\bar{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\bar{k} \qquad (11)$$

Нормальный вектор представим виде:

$$\bar{n} = \cos(\bar{n}\wedge x)\bar{i} + \cos(\bar{n}\wedge y)\bar{j} + \cos(\bar{n}\wedge z)\bar{k} \qquad (12)$$

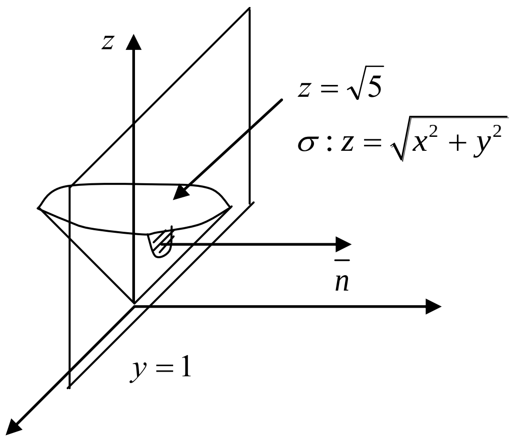
В формуле Стокса (10) в интеграле правой части представлено скалярное произведение векторов (11) и (12).

Тогда формула (10) будет иметь вид:

$$\oint\limits_L (\bar{F}, d\bar{r}) = \iint\limits_\delta (rot\bar{F}, \bar{n})d\sigma \qquad (13)$$

Формула (13) является сокращённой формой записи формулы Стокса.

Пример: Вычислить циркуляцию вектора $\overline{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k})$ по контору сечения конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостями $y = 1, z = \sqrt{5}$.



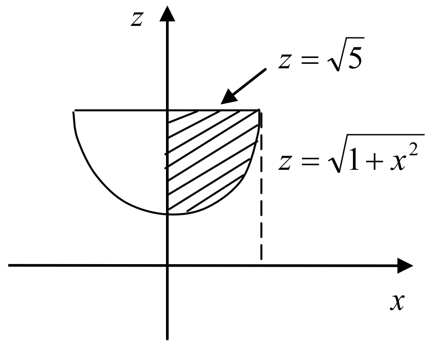


Рисунок: В плоскости $y = 1$, параллельной плоскости xoz

Подставим $y = 1$ в уравнение конуса: $x^2 + 1 = z^2 \to z^2 - x^2 = 1$- гипербола

Найдём направляющие косинусы для формулы (10):

$\overline{n} \wedge x = \dfrac{\pi}{2} \to \cos(\overline{n} \wedge x) = 0$, $\overline{n}{\wedge} y = 0 \to \cos(\overline{n}{\wedge} y) = 1$, $\overline{n}{\wedge} z = \dfrac{\pi}{2} \to \cos(\overline{n}{\wedge} z) = 0$

По условию: $X = Y = Z = x^2 + y^2 + z^2 \to \quad \dfrac{\partial X}{\partial z} = 2z$; $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2x$

Найдём точки пересечения прямой $z = \sqrt{5}$ и гиперболы $z^2 - x^2 = 1$: $\sqrt{5} = \sqrt{1 + x^2} \to 5 = 1 + x^2 \to x = \pm 2$

$$\oint_L (\overline{F}, d\overline{r}) = \iint_\delta (2z - 2x)d\sigma = 2\iint_D (2 - x)dxdz = 4\int_0^2 \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{5}} (2 - x)dzdx = 4\int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} - xz\right)\Bigg|_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{5}} dx =$$

$$= 2\int_0^5 (5 - 1 - x^2 - 2x\sqrt{5} + 2x\sqrt{1 + x^2})dx$$

Замена: $t = 1 + x^2, dt = 2xdx, \qquad t_н = 1, t_в = 5$

$$\oint_L (\overline{F}, d\overline{r}) = 2(4x - \frac{x^3}{3} - \sqrt{5}x^2)\Bigg|_0^2 + \int_1^5 \sqrt{1}dt = 2(8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{5} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{7}}\Bigg|_7^5) = 2(\frac{16}{3} - 4\sqrt{5} + \frac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5} - \frac{2}{3} =$$

$$= 2(\frac{14}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{4}{3}(7 - \sqrt{5}).$$

Операторы Гамильтона и Лапласа.

Определение: Вектором градиента скалярной функции $U(x,y,z)$ называется вектор, координаты которого являются частными производными от этой функции.

$$\overline{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{dz}\bar{k} \quad (1)$$

Замечание: Вектор-градиент показывает направление наискорейшего изменения функции при движении к максимуму этой функции.

Вынесем условно за скобку функцию U в формуле (1).

$$\overline{gradU} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)U$$

Оператор Гамильтона (набла-оператор): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

Приложения

1. Для вычисления вектора-градиента: $\overline{gradU} = \nabla U$

2. Для вычисления дивергенции: $div\overline{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ (2).. $\overline{F} = X_{\bar{i}} + Y_{\bar{j}} + Z_{\bar{k}}$ (3).

Вычислим скалярное произведение оператора Гамильтона и вектора (3):

$$\left(\nabla, \overline{F}\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv (2) \to \quad \to div\overline{F} = \left(\nabla, \overline{F}\right)$$

3. Для вычисления ротора: $rot\overline{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\bar{k}$ (4).

Вычислим векторное произведение оператора Гамильтона на вектор (3).

$$\left[\nabla, \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \quad \to rot\overline{F} = \left[\nabla, \overline{F}\right].$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\bar{i} + \bar{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \equiv (4)$$

4. Оператор Лапласа

Вычислим по формулам (1) и (2):

$$div\left(\overline{gradU}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U.$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа $\to duv\left(\overline{gradU}\right) = \Delta U$

Вычислим, используя последовательно 1 и 2 приложения:

$div\left(\overline{gradU}\right) = \left(\nabla, \overline{gradU}\right) = (\nabla, \nabla U) = (\nabla, \nabla)U = \nabla^2 U$; $\rightarrow$ $\Delta U = \nabla^2 U$; $\Delta = \nabla^2$;

5. Производная скалярного поля $U(x, y, z)$ по направлению вектора $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ **:**

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{dz}\cos\gamma \quad ,$$

где направляющие косинусы вектора $\overline{F}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Рассмотрим вектор, координаты которого соответствуют направляющим косинусам: $\overline{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Тогда производная по направлению будет вычисляться с помощью оператор Гамильтона:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \left(\nabla, \overline{n}\right)U$$