ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Часть 2

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Ряд Тейлора для ФКП.

Ряд Лорана, понятие вычета.

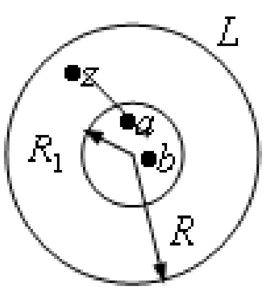
Изолированные особые точки.

Теорема о вычетах, вычет относительно полюса.

Ряд Тейлора для ФКП.

Теорема: Если ФКП $f(z)$ регулярна $\forall z \in D$, образованной окружностью $L: |z-в| = R$, то ФКП можно представить в виде степенного ряда Тейлора в окрестности точки b, причём это разложение единственно.

Доказательство:



Выделим точку b окружностью L. Внутри полученной окружности выберем произвольную точку a. Используем теорему Коши для получения двусвязанной области:

$$\int_L \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{L_1} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Для вычисления интеграла по контуру L_1 используем интегральную формулу Коши:

$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i \cdot f(a) \qquad (1)$$

Выражение $\dfrac{1}{z-a}$ будем рассматривать как сумму РГП

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}a_1q^n$$

$$S=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z-b+b-a}=\frac{1}{(z-b)-(a-b)}$$

Разделим числитель и знаменатель на $(z-b)$

$$S=\frac{1}{z-a}=\frac{\frac{1}{z-b}}{1-\frac{a-b}{z-b}}\to \qquad q=\frac{a-b}{z-b}; \qquad a_1=\frac{1}{z-b}.$$

$|a-b|<|z-b|$ (смотри рисунок) $\qquad \to |q|=\dfrac{|a-b|}{|z-b|}<1-$ ряд сходится.

Подставляем $a_1,\ q$ в формулу суммы РГП:

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z-b}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^n\to\frac{1}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}} \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$\int_{L_1} f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}dz=2\pi i f(a)\to f(a)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(a-b)^n\int_{L_1}\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz \qquad (3)$$

Используем интегральную формулу Коши для n – производной для точки b:

$$\int\limits_{L_1} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz = \frac{2\pi_i f^{(n)}(b)}{n!} \qquad (4)$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(a-\text{в})^n \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\text{в}) \to f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n$$

Так как точка a любая точка окрестности точки b, то заменим a на z.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

Обозначим: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}$ – коэффициент степенного ряда.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$ – степенной ряд Тейлора для ФКП.

Пример: Разложить в ряд Тейлора ФКП: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ в окрестности т. $b = 0$

$f_1(0) = \sin 0 = 0$

$f_1'(z) = \cos z$; $f_1'(0) = 1$; $f_1''(z) = -\sin z$; $f_1''(0) = 0$ $f_1'''(z) = -\cos z$; $f_1'''(0) = -1$ …

$$\to f_1(z) = \sin z = \overset{n=1}{\overbrace{z}} - \overbrace{\frac{1}{3!}}^{n=2} z^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$f(z) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n-1)}}{(2n-1)!}$$

Ряд Лорана, понятие вычета.

Определение: рядом Лорана называется степенной ряд содержащий целые положительные, нулевую и отрицательные степени.

$$...a_{-2}(z-b)^{-2}+a_{-1}(z-b)^{-1}\,a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+... \qquad (1)$$

Определение: коэффициент a_{-1} называется вычетом.

Ряд (1) можно разбить на сумму двух рядов (2) и (3):

$$...a_{-2}(z-b)^{-2}+a_{-1}(z-b)^{-1} \qquad (2)$$

$$a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+... \qquad (3)$$

Ряд (3) является рядом Тейлора, который сходится в круге: $|z-b|<R_1$ (4)

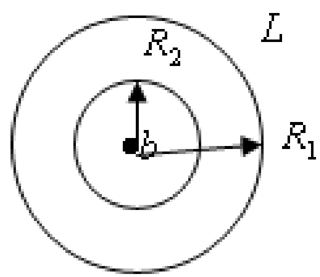
Для определения области сходимости ряда (2) введем для него новую переменную: $t = |z-b|^{-1}$.

Тогда ряд (2)примет следующий вид: $a_{-1}t + a_{-2}t^2 \dots$, который является также рядом Тейлора с области сходимости в круге: $|t| < r = \dfrac{1}{R_2}$.

Осуществим обратную замену: $\left|\dfrac{1}{(z-b)}\right| < \dfrac{1}{R_2} \to |z-b| > R_2$ (5)

Решая систему неравенств (4) и (5) получаем: $R_2 < |z-b| < R_1$ (6)

Вывод: Областью сходимости ряда Лорана является кольцо (6).



Вычислим коэффициенты перед отрицательными степенями ряда Лорана, т.е. для ряда (2).

Для контура L вычислим интеграл по интегральной формуле Коши:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-a}dz \;\; \forall a \in R_2 < |z-b| < R_1 \qquad (7)$$

Выражение $\frac{1}{z-a}$, входящие в интеграл (7) представим как сумму РГП:

$S = \frac{a_1}{1-q}$ или $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$, где a_1- первый член РГП, q-знаменатель РГП.

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z+b-b-a} = \frac{1}{(z-b)-(a-b)} = -\frac{1}{(a-b)-(z-b)} \qquad (8)$$

Разделим числитель и знаменатель (8) на $(a - b)$:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{\frac{1}{(a-b)}}{1-\frac{z-b}{a-b}} \rightarrow a_1 = \frac{1}{a-b}; q = \frac{z-b}{a-b}. \qquad (9)$$

Подставим a_1, q из (9) в РГП, тогда:

$$\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}} \qquad (10)$$

Замечание: по формуле (10) раскладывается в ряд Лорана выражение вида:

$$\frac{1}{z-a}$$

Умножаем (10) на $\frac{1}{2\pi i} f(z)$ и интегрируем по контуру L с учетом интегральной формулы Коши:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-a} dz = -\int_{L_1} \frac{1}{2\pi i} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$$

$$f(a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a-b)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(z)}{(z-b)^{-n}} dz \qquad (11)$$

Обозначим $k = -n-1$ и $a_k = a_{-n-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(z)}{(z-b)^{-n}} dz$.

При этой замене будут новые пределы в сумме (11):

$$n = \infty \to k_н = -\infty - 1 = -\infty; \qquad n = 0 \to k_в = 0 - 1 = -1.$$

Тогда формула (11) примет вид: $$f(a) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (a-b)^k \qquad (12)$$

С учетом того, что $\forall a \in R_2 < |z-b| < R_1$, заменим в формуле (12) a на z:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-b)^k$$

Соединяем полученный ряд с рядом Тейлора: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$.

Тогда окончательно имеем ряд Лорана со всеми степенями:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-b)^k \qquad (13)$$

$$\text{где} \quad a_k = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}, & \text{при } k = 0, 1, \ldots \infty \\ -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{L_1} \dfrac{f(z)}{(z-b)^{-n}} dz, & \text{при } k = -1, -2, \ldots -\infty \end{cases}$$

Замечание: ряд (13) можно записать и виде суммы двух рядов:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-b)^n}$$

Пример: Разложить в ряд Лорана ФКП: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$

в окрестности т. $b = i$

Корни знаменателя: $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$. Тогда ФКП: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Разложим дробь на простейшие: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{A}{(z-1)} + \dfrac{B}{(z-2)}$

Приведём к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей: $1 = A(z-2) + B(z-1)$ или $Az - 2A + Bz - B = 1$.

Приравниваем коэффициенты перед одинаковыми степенями z:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$$

Решаем эту системы, находим: $A = -1; \quad B = 1$

Тогда ФКП: $f(z) = -\dfrac{1}{(z-1)} + \dfrac{1}{(z-2)}$

Применяем формулу: $\dfrac{1}{z-a} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$

$b = i$, $a = 1$ для первой дроби и $a = 2$ для второй дроби.

Тогда: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$

Соединяя суммы в одну, окончательно имеем ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2-i)^{n+1}} \right]$$

Изолированные особые точки.

Определение: Точка $z = a$, в которой ФКП нерегулярна, называется изолированной особой точкой, если в её окрестности нет других особых точек.

Классификация особых точек

1. Устранимая особая точка.

Определение: Изолированная особая точка a называется устранимой для ФКП: $\dfrac{f(z)}{z-a}$, если $\forall z \to a$ функция $f(z)$ является ограниченной.

Пример: Разложить функцию в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ в окрестности точки $z=0$.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

$\sin z$ - является ограниченной функцией $\rightarrow z=0$ - устранимая особая точка $\rightarrow f(z)=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dots$ $\quad f(0)=1$.

2. Полюс.

Определение: Особая точка называется полюсом, если при любом подходе к этой особой точке ФКП является неограниченной.

Пример: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $\quad z=0-$ особая точка

$z\rightarrow 0-0 \qquad f(z)\rightarrow \dfrac{1}{-0}=-\infty$

$z\rightarrow 0+0 \qquad f(z)\rightarrow \dfrac{1}{0}=\infty \qquad z=0-$ полюс.

3. Существенно особая точка.

Определение: Особая точка называется существенно особой, если ФКП является односторонне неограниченной при любом подходе к этой точке.

Пример: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $\quad z=0-$ особая точка

$$z\to -0 \qquad f(z)\Rightarrow e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$z\to 0 \qquad f(z)=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$$

$z=0-$ существенно особая точка.

Приложения особых точек к ряду Лорана.

1. Ряд Лорана содержит только неотрицательные степени (Ряд Тейлора).

$$f(z)=a_0+a_1(z-в)+\ldots+a_m(z-в)^n+\ldots$$

Пусть $z\to в$ $\quad f(z)\to a_0 - const \neq \infty$ $\quad f(z)\to$ ограниченная

$\dfrac{f(z)}{z-в}$ – имеет устранимую особую точку $z=в$.

2. Ряд Лорана содержит ограниченное число отрицательных степеней.

$$f(z)=a_{-1}(z-в)^{-1}+a_{-2}(z-в)^{-2}+\ldots+a_{-m}(z-в)^{-m}$$

Вынесем за скобку $(z-в)^{-m}$

$$f(z)=\frac{a_{-1}(z-в)^{m-1}+a_{-2}(z-в)^{m-2}+\ldots+a_{-m}}{(z-в)^m}$$ $z=в$ – особая точка

$z\to в\pm 0 \qquad f(z)\to \dfrac{a_{-m}}{\pm 0}=\pm\infty \qquad z=в$ – полюс.

3. Ряд Лорана со всеми степенями.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad \text{Замена: } z-b=\frac{1}{t} \to t=\frac{1}{z-b} \qquad f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{t^n}$$

$t=0$ – особая точка

$$t \to \pm 0 \qquad f(t) \to \begin{cases} n<0;\, f(t) \to \dfrac{a_n}{0^{-n}} = a_n 0^n = 0 \\ n>0;\, f(t) \to \dfrac{a_n}{0} = \infty \end{cases}$$

$f(t)$ – односторонне ограниченна $\qquad t=0$ – существенно особая точка

Значит $z=\infty$ – существенно особая точка для ряда Лорана.

Теорема о вычетах, вычет относительно полюса.

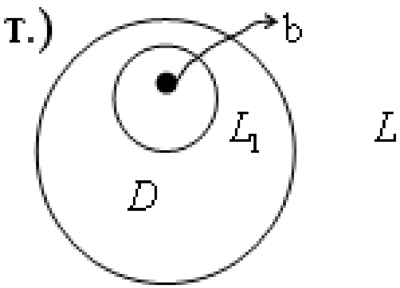
Теорема о вычетах:

Если ФКП регулярна во всех точках замкнутой области кроме особых точек (о.т. - полюс или существенно особых), то контурный интеграл от этой ФКП равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов, вычисленных для каждой особой точки лежащей внутри данной области.

Замечание: Вычеты не вычисляются для особых точек, которые лежат вне данной области.

Доказательство:

требуется доказать: $\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)}$ (k – номер о.т.)



Пусть область D содержит одну о.т. $z = b$,

Выделим особую точку кругом б.м. радиуса, образованного линией L_1.

Разложим ФКП в окрестностях особой точки в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} a_n (z-b)^n + a_{-1}(z-b)^{-1} \quad (1).$$

Проинтегрируем левую и правую части (1):

$$\int_L f(z)dz = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} \underbrace{a_n \int_L (z-b)^n dz}_{I_1} + \underbrace{a_{-1} \int_L \frac{1}{z-b} dz}_{I_2}$$

Интеграл I_1 в качестве подынтегральной функции содержит степенную функцию. Степенная функция является регулярной, значит по т. Коши для односвязной области этот интеграл равен 0.

Интеграл $I_2 = 2\pi i \quad \rightarrow \int_L f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$

Вычет относительно полюса:

Разложим ФКП в окрестности особой точки в ряд Лорана по формуле (1). Решим уравнение (1) относительно вычета a_{-1}:

$$a_{-1} = f(z)(z-b) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq -1)}}^{\infty} a_n (z-b)^n (z-b).$$

Вычислим предел от левой и правой части:

$$\lim_{z \to b} a_{-1} = \lim_{z \to b} f(z)(z-b) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq -1)}}^{\infty} a_n \lim_{z \to b} (z-b)^{n+1}$$

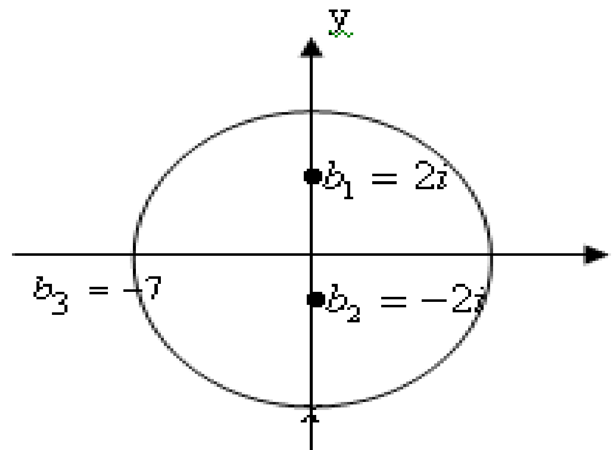
$$a_{-1} = \lim_{z \to b} f(z)(z-b)$$

Замечание: Используя другое обозначение вычеты: $\operatorname{Res}(f(z))$, можно записать доказанные выше формулы в следующих видах:

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z \to b_k}(f(z)) \quad \text{и} \quad \operatorname*{Res}_{z \to b_k}(f(z)) = \lim_{z \to b_k} f(z)(z-b_k)$$

Пример: $\displaystyle\int_L \frac{z\,dz}{(z^2+4)(z+7)} = I \qquad L: |z| = 3;$

$$z^2+4 = (z+2i)(z-2i) \;\rightarrow z = -7;\;\; z = \pm 2i - \text{ о.т.}$$



$$b_3 = -7 \notin L: |z| = 3$$

$$a_{-1}^{(1)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z-2i) = \frac{2i}{4i(2i+7)} = \frac{1}{2(2i+7)}$$

$$a_{-1}^{(2)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z+2i) = \frac{-2i}{-4i(7-2i)} = \frac{1}{2(7-2i)}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{2(7+2i)} + \frac{1}{2(7-2i)}\right) = \pi i\,\frac{7-2i+7+2i}{49-(-4)} = \frac{14}{53}\pi i\,.$$

Вычет k - го порядка

Определение: Порядком особой точки $z = a$ называется степень, в которую возводится выражение $z - a$.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе $z = a$ порядка k вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right]$$

Пример: *Вычислить Вычет функции* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+i)^2}$ *в точке* $z_0 = -i$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2} \right] \to$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left(z^2 \right) \to \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = 2 \lim_{z \to -i} z = -2i$$