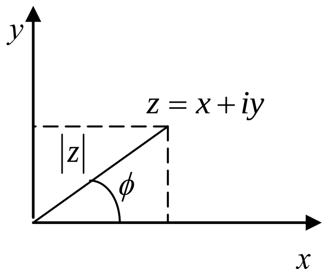
<u>ФКП</u>

<u>Производная функции комплексного переменного (ФКП), условия Коши - Римана, понятие регулярности ФКП.</u>

Изображение и вид комплексного числа.



Вид ФКП: $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$,
где U,V – действительная функция двух переменных (x,y),
U – действительная часть ФКП
V – мнимая часть ФКП,
y - мнимая ось, x - действительная ось

Производная ФКП.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y+\Delta y)+iV(x+\Delta x,y+\Delta y)-\Delta U(x,y)-iV(x,y)}{(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)-x-iy}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[U(x+\Delta x,y+\Delta y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x+\Delta x,y+\Delta y)-V(x,y)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$

1 случай: $\Delta y=0;\Delta x\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[U(x+\Delta x,y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x+\Delta x,y)-V(x,y)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xU+i\Delta xV}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xU}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xV}{\Delta x}\qquad f'(z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\quad (1)$$

2 случай: $\Delta x=0;\Delta y\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[U(x,y+\Delta y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x,y+\Delta y)-V(x,y)\right]}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yU+i\Delta yV}{i\Delta y}=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yU}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yV}{\Delta y}=\frac{1\cdot i}{\underbrace{i\cdot i}_{-1}}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\qquad f'(z)=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}\quad (2)$$

Замечание: Если производная существует, то она единственна, то есть формула (1) и (2) равны.

Замечание: Два комплексных числа равны, если равны их соответствующие действительные и мнимые части.

$$\to\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}\quad (3)\qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}\quad (4)$$

Формулы (3,4) называется условиями Коши-Римана, и определяют условие существования производной от ФКП.

Замечание: Если условия Коши-Римана выполняются, то производную от ФКП можно считать по любой из формул (1) или (2).

Определение: ФКП – называется регулярной или аналитической, если для него выполняются условие Коши-Римана.

Дифференцируемость элементарных ФКП.

1. $f(z)=z^2$

$$f(z)=(x+iy)^2=x^2+2xy+i^2y^2=(x^2-y^2)+i(2xy)\to \begin{matrix} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{matrix},$$

Условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\equiv\frac{\partial v}{\partial y}=2x;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y\equiv-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y)=2y$

Вывод: $f(z)=z^2$- регулярная ФКП.

Производная: $f'(z)=2x+i2y=2(x+iy)=2z\to \quad (z^2)'=2z$

2. $f(z)=e^z\to f(z)=e^{x+iy}$

Используем формулу Эйлера: $e^{a+ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$, тогда:

$$f(x)=e^x(\cos y+i\sin y)\to \begin{matrix} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{matrix}$$

Условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y\equiv\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y\equiv-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y$

Вывод: все элементарные ФКП являются регулярными.

Производная: $f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z\to\left(e^z\right)'=e^z$

3. $f(z)=\sin z$

Преобразуем формулу Эйлера: $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Зададим: $x=0\to e^{iy}=\cos y+i\sin y$.

$y=z\to e^{iz}=\cos z+i\sin z\ \ (1),\quad y=-z\to e^{-iz}=\cos z-i\sin z\ \ (2);$

$(1)+(2)\to\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ \ (3),\quad (1)-(2)\to\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}(4)$

$f'(z)=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\to\quad(\sin z)'=\cos z$

4. $f(z) = \cos z$.

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{i^2\left(e^{iz} - e^{-z}\right)}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

5. $f(z) = tgz$

$$f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad f'(z) = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}.$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}{4} + \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{4i^2} = \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} - e^{-2iz}\right) = \frac{1}{4}4 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (tgz)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

Вывод: формулы дифференцирования ФКП остаются такими же, как и формулы дифференцирования функции действительного переменного.

Определение:

Главная часть приращения $\Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha\Delta z$ *функции* $w = f(z)$ *называется* ***дифференциалом*** *этой функции*

Общая показательная функция $w = a^z$ *комплексного переменного* z *определяется равенством…*

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$$

Решение: $\ln a^z = \ln e^{z\,\mathrm{Ln}\,a} \rightarrow z\,\mathrm{Ln}\,a \equiv z\,\mathrm{Ln}\,a$

Общая степенная функция $w = z^\alpha$ *комплексного переменного* z *определяется равенством…*

$$z^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}$$

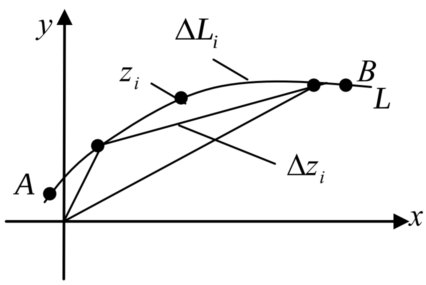
Логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln}\,z$ *комплексного переменного* z *определяется равенством…*

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Решение: $z = |z|e^{i(\arg z + 2k\pi)} \rightarrow$

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z|e^{i(\arg z + 2k\pi)} = \ln|z| + \ln e^{i(\arg z + 2k\pi)} \rightarrow$$

Интегрирование по комплексному аргументу.



Дано: $f(z)$ - регулярная ФКП.

Требуется составить интервал по линии L.

Решение: Разобьём участок линии AB на n частей длиною ΔL_i. Внутри каждого участка выберем произвольную точку z_i и вычислим ФКП в данной точке.

Приближённо заменим участок кривой ΔL на длину вектора Δz_i.

Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i \quad (1)$$

Определение: Интегралом по комплексному аргументу или контурным интегралом называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначения контурного интеграла.

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i \quad (2)$$

Вычисление контурного интеграла.

$$f(z_i) = U(x_i, y_i) + iV(x_i, y_i) \ (3) \qquad \Delta z_i = \Delta x_i + i\Delta y_i \ (4)$$

Подставляем (3),(4) в (2):

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U+iV)(\Delta x + i\Delta y) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U_i\Delta y + U\Delta x + iV\Delta x - V\Delta y) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U\Delta x - V\Delta y) + i\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(V\Delta x + U\Delta Y)$$

Замечание: Каждый из этих пределов представляет собой линейный интеграл.

$$\int_L f(z)dz = \int_L [Udx - Vdy] + i\int_L [Vdx + Udy]$$

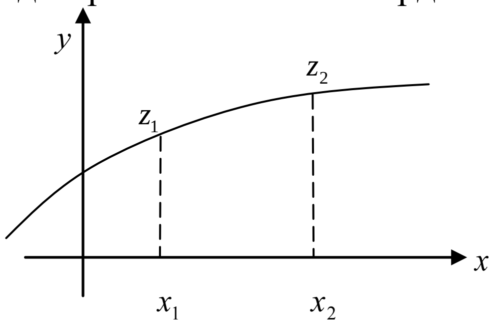
Специальные функции

$\mathrm{Re}(z) = x$ - функция выделения действительной части,

$\mathrm{Im}(z) = y$ - функция выделения мнимой части.

Способы задания линии L.

1. В декартовой системе координат $L: y = f(x)$ от т. z_1 до т. z_2.



$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \to x \in [x_1, x_2]$$

Пример: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \mathrm{Re}(z)dz$, $L: y = x,$ от т. $z_1(0,0)$ до т. $z_2(1,1)$

$\to x \in [0,1]$, $\mathrm{Re}(z) = x \to \int\limits_L xdz$

Используем формулу: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L [Udx - Vdy] + i\int\limits_L [Vdx + Udy]$,

где для этого примера: $U = x$, $V = 0$.

$$\to \int\limits_L xdz = \int\limits_L [xdx] + i\int\limits_L [xdy]$$

Для вычисления полученных линейных интегралов используем формулу:

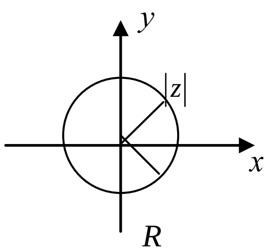
$$\int\limits_L [Xdx + Ydy] = \int\limits_a^b [X(x; y(x)) + Y(x; y(x) \cdot y'(x)]dx$$

$$\to \int\limits_L xdz = \int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + i\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

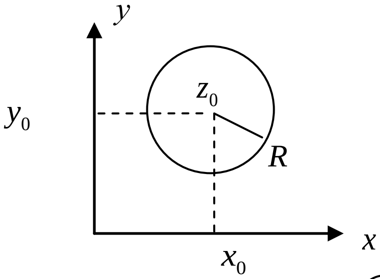
2. В параметрической форме и в полярной системе координат.

а) $L: |z| = R$ - окружность радиуса R с центром в начале координат.

$t = \phi \in [0, 2\pi]$



б) $L: |z - z_0| = R$ - окружность радиуса R с центром в точке: $z_0 = x_0 + iy_0$.



Пример: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \left[(x+y) - ixy\right]dz$, $L: x = \cos t$, $y = \sin t$ - окружность $R = 1$.

Используем формулу: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \left[Udx - Vdy\right] + i\int\limits_L \left[Vdx + Udy\right]$,

где для этого примера: $U = x + y$, $V = -xy$.

$$\to \int\limits_L \left[(x+y) - ixy\right]dz = \int\limits_L \left[(x+y)dx + xydy\right] + i\int\limits_L \left[-xydx + (x+y)dx\right]$$

Для вычисления полученных линейных интегралов используем формулу:

$$\int\limits_L \left[Xdx + Ydy\right] = \int\limits_{tн}^{tв} \left[X(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + Y(x(t); y(t) \cdot y'(t)\right]dt$$

$$\int\limits_L f(z)dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} \left[(\cos t + \sin t)\underset{x'(t)}{(-\sin t)} + \cos t \sin t \underset{y'(t)}{\cos t} \right] dt +$$

$$+ i4\int\limits_0^{\pi/2} \left[-\cos t \sin t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t\right]dt =$$

$$\int\limits_L f(z)dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}\sin 2t - \sin^2 t + \sin t \cos^2 t \right] dt + 4i\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos t \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t \right] dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt + \underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 tdt}_{I_1} \right) +$$

$$+ 4i\left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 tdt + \underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt}_{I_2} - \frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

Замена: для I_1: $U = \sin t \to dU = \cos tdt$; $t_H = 0$, $t_B = 1$,

для I_2: $V = \cos t \to dV = -\sin tdt$; $t_H = 1$, $t_B = 0$

$$\int\limits_L f(z)dz = = 4\left(\frac{1}{4}(-1-1) - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 U^2dU \right) + 4i\left(\int\limits_0^1 V^2dV + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}(-1-1) \right) =$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{U^3}{3}\Big|_0^1 \right) + 4i\left(\frac{V^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = -2 - \pi - \frac{4}{3} - i\left(\frac{4}{3} + \pi + 2 \right) = -\frac{2}{3} - \pi + i\left(\frac{10}{3} + \pi \right).$$

Свойства интеграла по комплексному аргументу.

1. $\int\limits_{L} f\left(z\right)dz = -\int\limits_{L} f\left(z\right)dz$ 2. $\int\limits_{L} cf\left(z\right)dz = c\int\limits_{L} f\left(z\right)dz$

3. $\int\limits_{L}\left[f_1(z)+f_2(z)\right]dz = \int\limits_{L} f_1(z)dz + \int\limits_{L} f_2(z)dz$

4. Если $L = L_1 +{}_2;$ $\int\limits_{L} f\left(z\right)dz = \int\limits_{L_1} f\left(z\right)dz + \int\limits_{L_2} f\left(z\right)dz$

5. Если ФКП является ограниченной функцией, т.е. $\left|f\left(z\right)\right| < M$, где $M = \max\left\{f\left(z\right)\right\}, \forall z \in L$, то контурный интеграл ограничен следующим значением:, $\left|\int\limits_{L} f(z)dz\right| \le M \times L$, где L-длина линии.

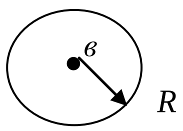
Теорема Коши для односвязной области.

Определение: Область называется односвязной, если она образованна одним замкнутым контуром.

Теорема: Контурный интеграл от регулярной во всех точках односвязной области ФКП по контуру этой области равен нулю.

Доказательство:

$\int\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{L}\left[Udx - Vdy\right] + i\int\limits_{L}\left[Vdx + Udy\right]$ $L: \left|z - в\right| > R$ $\rightarrow$



Линейный интеграл по замкнутому контуру называется циркуляцией и вычисляется по формуле Грина:

$$\oint\limits_{L}\left[Xdx + Ydy\right] = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\,dxdy;$$

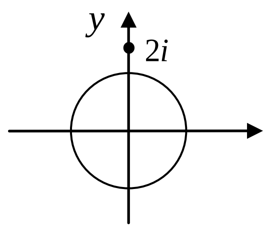
$$\int\limits_{L} f(z)dz = \iint\limits_{D}\left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1)$$

По условию ФКП регулярная, значит, для неё выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ (2) $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ (3)

Подставляем (2,3) в интеграл (1)

$$\int\limits_{L} f(z)dz = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

Замечание: Теорема Коши применяется, если точки в которых функция нерегулярна, расположены в не односвязной области.



Пример: $\oint \frac{z^2dz}{z - 2i} = 0$ $L: \left|z\right| = 1$

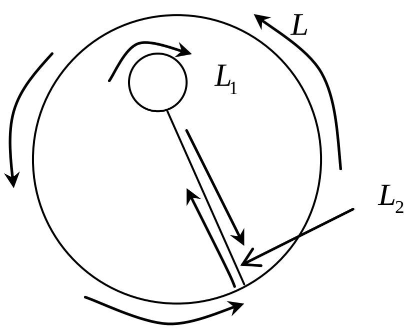
В точке $z = 2i -$ ФКП нерегулярна.

Теорема Коши для многосвязной области.

Определение: Область называется многосвязной, если внутри одного замкнутого контура расположен один или более других замкнутых контуров.

Теорема: Интеграл от регулярной ФКП во всех точках многосвязной области по внешнему контуру равен сумме контурных интегралов, вычисленных по каждому из внутренних контуров.

Доказательство:



Введём дополнительный контур: L_2.

Тогда получится: $L + L_2 + L_1 + L_2$ - односвязная область.

По теореме Коши интеграл по односвязной области равен нулю, а по 4 свойству контурных интегралов разбиваем интеграл по всему контуру на сумму 4-х интегралов:

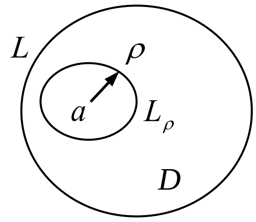
$$\int_L f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz = 0 \to \int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz, \text{ч.т.д.}$$

Замечание: Теорема Коши применяется для вычисления контурного интеграла по произвольному контуру через контурный интеграл по круговому контуру.

Интегральная формула Коши.

Замечание: Эта формула применяется, если точка, в которой подынтегральная ФКП нерегулярна, расположены внутри области, ограниченной замкнутой линией L.

Дано: $f(z)$ – ФКП, регулярная $\forall z \in D$, ограниченной замкнутой линией L.



Найти: $\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = ?\quad (a \in D, a - const)$

Решение:

Выделим точку a окружностью бесконечно малого радиуса. $\rho \to 0$

В результате получим двусвязную область, для которой используем теорему Коши для многосвязной области (этот переход необходим, чтобы вместо произвольного контура получить круговой.

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = \int\limits_{L\rho} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int\limits_{L\rho} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}dz = \int\limits_{L\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + \int\limits_{L\rho} \frac{f(a)}{z-a}dz =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{L\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz}_{I_1} + f(a)\underbrace{\int\limits_{L\rho} \frac{1}{z-a}dz}_{I_2} \quad (1)$$

Оценим значение интеграла I_1, возьмём его по модулю:

$$|I_1| = \left|\int\limits_L \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|$$

По пятому свойству контурного интеграла $|I_1| \le M \cdot L\rho$, где

$M = \max\{f(z)-f(a)\}, L_\rho = 2\pi\rho$, где $\rho \to 0, тогда : L\rho \to 0, значит : |I_1| \to 0$

Вычислим интеграл $I_2 \to \quad I_2 = \int\limits_{L\rho} \frac{1}{z-a}dz$

Используем показательную форму записи комплексного числа:

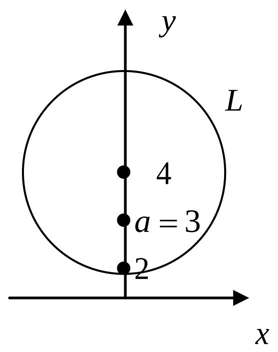
$z = re^{i\phi}$ где r – модуль, φ – аргумент.

Замена: $z-a = re^{i\varphi} \to z = a + re^{i\varphi} \qquad dz = rie^{i\varphi}d\varphi \qquad \varphi_н = 0; \varphi_в = 2\pi$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i \quad (2)$$

Подставляем $I_1 = 0$ и I_2 из (2) в (1): $\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$.

Пример: $\int\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-3i)}$, $L: |z-4i| = 2$



$a = 3i$, $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $f(a) = \frac{e^{3i}}{3i}$.

$$\int\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-3i)} = 2\pi i \frac{e^{3i}}{3i} = \frac{2}{3}\pi e^{3i}$$

Интегральная формула коши для n - й производной.

Дано: $\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad (1)$.

Продифференцируем левую и правую части формулы (1) по переменной a:

$$\int\limits_L \frac{-f(z)}{(z-a)^2}(-1) dz = \int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 2\pi i f'(a) \ (2).$$

Дифференцируем формулу (2): $2\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 2\pi i f''(a) \ (3)$.

Дифференцируем формулу (3): $6\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^4} dz = 2\pi i f'''(a)$.

С учётом, что $2 \equiv 2!, \quad 6 \equiv 3!$ и т.д., получим в общем случае:

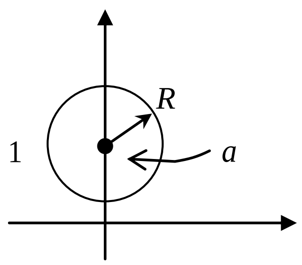
$$n!\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i f^{(n)}(a)$$

Тогда интегральная формула Коши для n-ной производной:

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$$

Пример: $\int\limits_L \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$, $L: |z-i| = R - const.$

$a = i; \ f(z) = \cos z; \ n = 2$

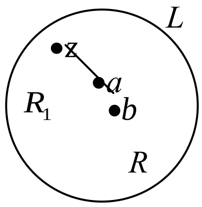


$$f'(z) = -\sin z$$
$$f''(z) = -\cos z \to \int\limits_L \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i(-\cos i)}{2} = -\pi i \cos i$$
$$f''(a) = -\cos i$$

Ряд Тейлора для ФКП.

Теорема: Если ФКП $f(z)$ регулярна $\forall z \in D$, образованной окружностью $L: |z-в| = R$, то ФКП можно представить в виде степенного ряда Тейлора в окрестности точки b, причём это разложение единственно.

Доказательство:



Выделим точку b окружностью L. Внутри полученной окружности выберем произвольную точку a.
Используем теорему Коши для получения двусвязанной области:

$$\int_L \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{L_1} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Для вычисления интеграла по контуру L_1 используем интегральную формулу Коши:

$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i \cdot f(a) \qquad (1)$$

Выражение $\frac{1}{z-a}$ будем рассматривать как сумму РГП

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n \to S = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b+b-a} = \frac{1}{(z-b)-(a-b)}$$

Разделим числитель и знаменатель на $(z-b)$

$$S = \frac{1}{z-a} = \frac{\frac{1}{z-b}}{1-\frac{a-b}{z-b}} \to \qquad q = \frac{a-b}{z-b}; \qquad a_1 = \frac{1}{z-b}.$$

$|a-b| < |z-b|$ (смотри рисунок) $\qquad \to |q| = \frac{|a-b|}{|z-b|} < 1 -$ ряд сходится.

Подставляем $a_1,\ q$ в формулу суммы РГП:

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-b}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^n \to \frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}} \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$\int_{L_1} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}dz = 2\pi i f(a) \to f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (a-b)^n \int_{L_1} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz \qquad (3)$$

Используем интегральную формулу Коши для $n-$производной для точки b:

$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz = \frac{2\pi_i f^{(n)}(b)}{n!} \qquad (4)$$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(a-в)^n\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(в)\rightarrow\quad f(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n$$

Так как точка a любая точка окрестности точки b, то заменим a на z.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

Обозначим: $a_n=\dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}$ – коэффициент степенного ряда.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n\ –\ \text{степенной ряд Тейлора для ФКП.}$$

Пример: Разложить в ряд Тейлора ФКП: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ в окрестности т. $b=0$

$f_1(0)=\sin 0=0$

$f_1'(z)=\cos z$; $f_1'(0)=1$; $\quad f_1''(z)=-\sin z$; $f_1''(0)=0$ $\quad f_1'''(z)=-\cos z$; $f_1'''(0)=-1$ …

$$\rightarrow f_1(z)=\sin z=\overset{n=1}{z}\ \overset{n=2}{-\frac{1}{3!}z^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$f(z)=\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2(n-1)}}{(2n-1)!}$$

Ряд Лорана, понятие вычета.

Определение: рядом Лорана называется степенной ряд содержащий целые положительные, нулевую и отрицательные степени.

$$...a_{-2}(z-b)^{-2}+a_{-1}(z-b)^{-1}\ a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+... \qquad (1)$$

Определение: коэффициент a_{-1} называется вычетом.

Ряд (1) можно разбить на сумму двух рядов (2) и (3):

$$...a_{-2}(z-b)^{-2}+a_{-1}(z-b)^{-1} \qquad (2)$$

$$a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+... \qquad (3)$$

Ряд (3) является рядом Тейлора, который сходится в круге: $|z-b|<R_1$ (4)

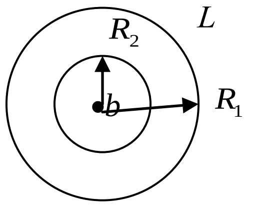
Для определения области сходимости ряда (2) введем для него новую переменную: $t=|z-b|^{-1}$.

Тогда ряд (2)примет следующий вид: $a_{-1}t+a_{-2}t^2...$, который является также рядом Тейлора с области сходимости в круге: $|t|<r=\dfrac{1}{R_2}$.

Осуществим обратную замену: $\left|\dfrac{1}{(z-b)}\right|<\dfrac{1}{R_2}\rightarrow|z-b|>R_2$ (5)

Решая систему неравенств (4) и (5) получаем: $R_2<|z-b|<R_1$ (6)

Вывод: Областью сходимости ряда Лорана является кольцо (6).



Вычислим коэффициенты перед отрицательными степенями ряда Лорана, т.е. для ряда (2).

Для контура L вычислим интеграл по интегральной формуле Коши:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{z-a}dz\ \ \forall a\in R_2<|z-b|<R_1 \qquad (7)$$

Выражение $\dfrac{1}{z-a}$, входящие в интеграл (7) представим как сумму РГП:

$S=\dfrac{a_1}{1-q}$ или $S=\sum_{n=0}^{\infty}a_1q^n$, где a_1- первый член РГП, q-знаменатель РГП.

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z+b-b-a}=\frac{1}{(z-b)-(a-b)}=-\frac{1}{(a-b)-(z-b)} \qquad (8)$$

Разделим числитель и знаменатель (8) на *(a - b)*:

$$\frac{1}{z-a}=-\frac{\frac{1}{(a-b)}}{1-\frac{z-b}{a-b}}\to a_1=\frac{1}{a-b};q=\frac{z-b}{a-b}. \qquad (9)$$

Подставим a_1, q из (9) в РГП, тогда:

$$\frac{1}{z-a}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}} \qquad (10)$$

Замечание: по формуле (10) раскладывается в ряд Лорана выражение вида:

$$\frac{1}{z-a}$$

Умножаем (10) на $\frac{1}{2\pi i}f(z)$ и интегрируем по контуру L с учетом интегральной формулы Коши:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{z-a}dz=-\int_{L_1}\frac{1}{2\pi i}f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$$

$$f(a)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a-b)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(z)}{(z-b)^{-n}}dz \qquad (11)$$

Обозначим $k = -n-1$ и $a_k = a_{-n-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(z)}{(z-b)^{-n}}dz$.

При этой замене будут новые пределы в сумме (11):

$$n=\infty\to k_н=-\infty-1=-\infty; \quad \text{n}=0\to k_в=0-1=-1.$$

Тогда формула (11) примет вид: $f(a)=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(a-b)^k$ (12)

С учетом того, что $\forall a\in R_2<|z-b|<R_1$, заменим в формуле (12) a на z:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(z-b)^k$$

Соединяем полученный ряд с рядом Тейлора: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$.

Тогда окончательно имеем ряд Лорана со всеми степенями:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k \qquad (13)$$

где $a_k = \begin{cases}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}, & \text{при } k=0,1,\ldots\infty\\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(z)}{(z-b)^{-n}}dz, & \text{при } k=-1,-2,\ldots-\infty\end{cases}$

Замечание: ряд (13) можно записать и виде суммы двух рядов:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-b)^n}$$

Пример: Разложить в ряд Лорана ФКП: $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$

в окрестности т. $b=i$

Корни знаменателя: $z_1=1$ и $z_2=2$. Тогда ФКП: $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Разложим дробь на простейшие: $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{A}{(z-1)}+\dfrac{B}{(z-2)}$

Приведём к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей: $1=A(z-2)+B(z-1)$ или $Az-2A+Bz-B=1$.

Приравниваем коэффициенты перед одинаковыми степенями z:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

Решаем эту системы, находим: $A=-1;\quad B=1$

Тогда ФКП: $f(z)=-\dfrac{1}{(z-1)}+\dfrac{1}{(z-2)}$

Применяем формулу: $\dfrac{1}{z-a}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$

$b=i$, $a=1$ для первой дроби и $a=2$ для второй дроби.

Тогда: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$

Соединяя суммы в одну, окончательно имеем ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-i)^{n+1}}\right]$$

Изолированные особые точки.

Определение: Точка $z = a$, в которой ФКП нерегулярна, называется изолированной особой точкой, если в её окрестности нет других особых точек.

Классификация особых точек

1. Устранимая особая точка.

Определение: Изолированная особая точка a называется устранимой для ФКП: $\frac{f(z)}{z-a}$, если $\forall z \to a$ функция $f(z)$ является ограниченной.

Пример: Разложить функцию в ряд Лорана $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ в окрестности точки $z = 0$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$\sin z$ - является ограниченной функцией $\to z = 0$ - устранимая особая точка $\to f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots \qquad f(0) = 1$.

2. Полюс.

Определение: Особая точка называется полюсом, если при любом подходе к этой особой точке ФКП является неограниченной.

Пример: $f(z) = \frac{1}{z} \qquad z = 0 -$ особая точка

$$z \to 0 - 0 \qquad f(z) \to \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$z \to 0 + 0 \qquad f(z) \to \frac{1}{0} = \infty$$

$z = 0 -$ полюс.

3. Существенно особая точка.

Определение: Особая точка называется существенно особой, если ФКП является односторонне неограниченной при любом подходе к этой точке.

Пример: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $z=0-$ особая точка

$z\to -0$ $f(z)\Rightarrow e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$

$z\to 0$ $f(z)=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$

$z=0-$ существенно особая точка.

Приложения особых точек к ряду Лорана.

1. Ряд Лорана содержит только неотрицательные степени (Ряд Тейлора).

$f(z)=a_0+a_1(z-в)+\ldots+a_m(z-в)^n+\ldots$

Пусть $z\to в$ $f(z)\to a_0-const\neq\infty$ $f(z)\to$ ограниченная

$\frac{f(z)}{z-в}-$ имеет устранимую особую точку $z=в$.

2. Ряд Лорана содержит ограниченное число отрицательных степеней.

$f(z)=a_{-1}(z-в)^{-1}+a_{-2}(z-в)^{-2}+\ldots+a_{-m}(z-в)^{-m}$

Вынесем за скобку $(z-в)^{-m}$

$f(z)=\frac{a_{-1}(z-в)^{m-1}+a_{-2}(z-в)^{m-2}+\ldots+a_{-m}}{(z-в)^m}$ $z=в-$ особая точка

$z\to в\pm 0$ $f(z)\to\frac{a_{-m}}{\pm 0}=\pm\infty$ $z=в-$ полюс.

3. Ряд Лорана со всеми степенями.

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$ Замена: $z-b=\frac{1}{t}\to t=\frac{1}{z-b}$ $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{1}{t^n}$ $t=0-$ особая точка

$$t\to\pm 0 \qquad f(t)\to\begin{cases} n<0;\ f(t)\to\frac{a_n}{0^{-n}}=a_n0^n=0\\ n>0;\ f(t)\to\frac{a_n}{0}=\infty\end{cases}$$

$f(t)-$ односторонне ограниченна $t=0-$ существенно особая точка

Значит $z=\infty-$ существенно особая точка для ряда Лорана.

Теорема о вычетах, вычет относительно полюса.

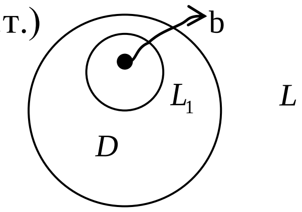
Теорема о вычетах:

Если ФКП регулярна во всех точках замкнутой области кроме особых точек (о.т. - полюс или существенно особых), то контурный интеграл от этой ФКП равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов, вычисленных для каждой особой точки лежащей внутри данной области.

Замечание: Вычеты не вычисляются для особых точек, которые лежат вне данной области.

Доказательство:

требуется доказать: $\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)}$ (κ – номер о.т.)



Пусть область D содержит одну о.т. $z = b$,

Выделим особую точку кругом б.м. радиуса, образованного линией L_1.

Разложим ФКП в окрестностях особой точки в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} a_n (z-b)^n + a_{-1}(z-b)^{-1} \quad (1).$$

Проинтегрируем левую и правую части (1):

$$\int\limits_L f(z)dz = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} \underbrace{a_n \int\limits_L (z-b)^n dz}_{I_1} + \underbrace{a_{-1}\int\limits_L \frac{1}{z-b}dz}_{I_2}$$

Интеграл I_1 в качестве подынтегральной функции содержит степенную функцию. Степенная функция является регулярной, значит по т. Коши для односвязной области этот интеграл равен 0.

Интеграл $I_2 = 2\pi i \quad \to \int\limits_L f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$

Вычет относительно полюса:

Разложим ФКП в окрестности особой точки в ряд Лорана по формуле (1). Решим уравнение (1) относительно вычета a_{-1}:

$$a_{-1} = f(z)(z-b) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} a_n (z-b)^n (z-b).$$

Вычислим предел от левой и правой части:

$$\lim_{z\to b} a_{-1} = \lim_{z\to b} f(z)(z-b) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -1)}}^{\infty} a_n \lim_{z\to b} (z-b)^{n+1}$$

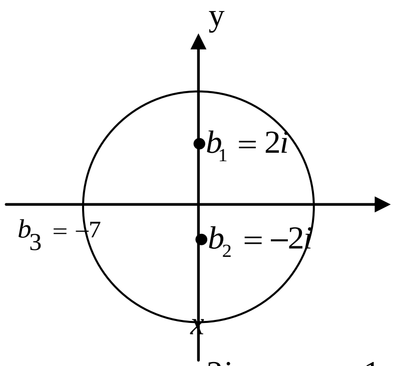
$$a_{-1} = \lim_{z\to b} f(z)(z-b)$$

Замечание: Используя другое обозначение вычеты: $\operatorname{Res}(f(z))$, можно записать доказанные выше формулы в следующих видах:

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z\to b_k} (f(z)) \quad \text{и} \quad \operatorname*{Res}_{z\to b_k} (f(z)) = \lim_{z\to b_k} f(z)(z-b_k)$$

Пример: $\displaystyle\int_L \frac{z\,dz}{(z^2+4)(z+7)} = I \qquad L: |z| = 3;$

$z^2 + 4 = (z+2i)(z-2i) \ \to z = -7;\ z = \pm 2i -$ о.т.



$b_3 = -7 \notin L: |z| = 3$

$$a_{-1}^{(1)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z-2i) = \frac{2i}{4i(2i+7)} = \frac{1}{2(2i+7)}$$

$$a_{-1}^{(2)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z+2i) = \frac{-2i}{-4i(7-2i)} = \frac{1}{2(7-2i)}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{2(7+2i)} + \frac{1}{2(7-2i)}\right) = \pi i \frac{7-2i+7+2i}{49-(-4)} = \frac{14}{53}\pi i\,.$$

Вычет κ - го порядка

Определение: Порядком особой точки $z = a$ называется степень, в которую возводится выражение $z - a$.

Вычет функции $f\left(z\right)$ в полюсе $z = a$ порядка k вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f\left(z\right) = \frac{1}{\left(k-1\right)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\left(z-a\right)^k f\left(z\right)\right]$$

Пример: *Вычислить Вычет функции* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+i)^2}$ *в точке* $z_0 = -i$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f\left(z\right) = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\left(z+i\right)^2\frac{z^2}{(z+i)^2}\right] \to \operatorname*{Res}_{z=-i} f\left(z\right) = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left(z^2\right) \to$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f\left(z\right) = 2\lim_{z\to -i} z = -2i$$