

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Преобразование Лапласа, понятие изображения и оригинала.
Единственность изображения, изображение функции Хевисайда,
синуса и косинуса.

Изображение функции с изменённым масштабом.

Линейность изображения.

Теорема смещения.

Теорема запаздывания.

Дифференцирование изображений и изображений производных.

Изображающее уравнение для решения
дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Теорема свёртывания.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Преобразование Лапласа, понятие изображения и оригинала.



Дано: действительная функция $f(t)$, которая определена, т.е. отлична от нуля на интервале $[0, \infty)$ и является ограниченной функцией на этом интервале, т.е. $|f(t)| < Me^{-kt}$, $(M, k - \text{const}; M, k > 0)$ и ФКП $\varphi(z) = e^{-zt}$.

Преобразуем ФКП, используя формулу Эйлера: $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b); z = x + iy$;

$$\varphi(z) + e^{-zt} = e^{-xt-iyt} = e^{-xt}(\cos yt - i \sin yt) \quad (1)$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$F(z) = \int_0^{\infty} y(z) f(t) dt = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-zt}}_1 f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} (\cos yt - i \sin yt) f(t) dt.$$

$$F(z) = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) \cos(yt) dt}_{I_1} - i \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) \sin(yt) dt}_{I_2}; \quad (2)$$





Докажем, что интегралы, входящие в (2) сходятся, для этого оценим значение интеграла I_1 :

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-xt}| |\cos yt| |f(t)| dt < \int_0^{\infty} e^{-xt} M e^{-kt} dt = M \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t(x+k)} dt = \\ &= M \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-t(x+k)}}{-(x+k)} \Big|_0^b = -\frac{M}{x+k} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{b(x+k)}} - 1 \right) = \frac{M}{x+k} \neq \infty; \end{aligned}$$

$$F(z) = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt}_{\text{Изображение}} \quad (3) \text{ - сходится.}$$

Определение: Изображением называется функция $F(z)$, вычисленная по формуле (3) от функции $f(t)$, называемой оригиналом.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Обозначение вычисления изображения: $F(z) \rightarrow f(t)$.

Замечание: Аргументом изображения является выражение, стоящее в степени экспоненты, перед аргументом функции оригинала и с обратным знаком.

Основное свойство изображения:

Если функция-оригинал умножается на константу, то соответствующая функция-изображение умножается на ту же самую константу: $cF(z) \rightarrow cf(t)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Единственность изображения, изображение функции Хевисайда, синуса и косинуса.



Теорема: Если функция имеет изображение, то оно единственно.

Изображение функции Хевисайда: $f(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, \infty) \\ 0, t \in (-\infty, 0] \end{cases}$

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-zt}}{-z} \Big|_0^b = -\frac{1}{z} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^z b} - 1 \right) = \frac{1}{z}, \frac{1}{z} \rightarrow 1.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Изображение синуса: $f(t) = \sin t$

$$F(z) \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} \sin t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} \sin t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} I \Big|_0^b \quad (1)$$

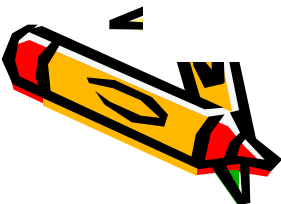
$$I = \int e^{-zt} \sin t dt = -e^{-zt} \cos t - z \int e^{-zt} \cos t dt = \left(\begin{array}{l} u = e^{-zt} \rightarrow du = -ze^{-zt} dt, \\ dv = \sin t dt \rightarrow v = -\cos t, dv = \cos t dt \rightarrow v = \sin t \end{array} \right) =$$
$$= -e^{-zt} \cos t - z \left(e^{-zt} \sin t + z \int e^{-zt} \sin t dt \right)$$

$$I = -e^{-zt} (\cos t + z \sin t) - z^2 I; (1 + z^2) I = -e^{-zt} (\cos t + z \sin t) \rightarrow I = -\frac{e^{-zt} (\cos t + z \sin t)}{(1 + z^2)} \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$F(z) = -\frac{1}{1 + z^2} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-zb} (\cos b + z \sin b) \Big|_0^b = -\frac{1}{1 + z^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos b + z \sin b}{e^{zb}} - 1 \right) = \frac{1}{1 + z^2};$$
$$\frac{1}{1 + z^2} \rightarrow \sin t.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Изображение косинуса: $f(t)=\cos t$

$$F(z) \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} \cos t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} \cos t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} I \Big|_0^b \quad (3)$$

$$I = \int e^{-zt} \cos t dt = e^{-zt} \sin t + z \int e^{-zt} \sin t dt = \left(\begin{array}{l} u = e^{-zt} \rightarrow du = ze^{-zt} dt, \\ dv = \cos t dt \rightarrow v = \sin t; dv = \sin t dt \rightarrow v = -\cos t \end{array} \right) =$$

$$= e^{-zt} \sin t + z \left(-e^{-zt} \cos t - z \int e^{-zt} \cos t dt \right)$$

$$I = -e^{-zt} (\sin t - z \cos t) - zI \rightarrow I = \frac{e^{-zt} (\sin t - z \cos t)}{(1 + z^2)} \quad (4)$$

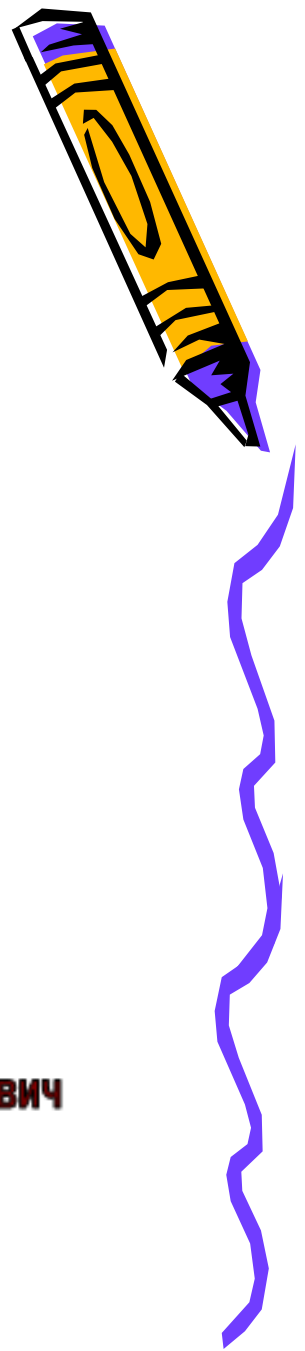
Подставляем (4) в (3): $F(z) = \frac{1}{1+z^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin b + z \cos b}{e^{zb}} + z \right) = \frac{z}{1+z^2}$

$$\frac{z}{1+z^2} \rightarrow \cos t .$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Изображение функции с изменённым масштабом.



Теорема: Если $F(z) \rightarrow f(t)$, то $\underbrace{\frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right)}_{F_1(z)} \rightarrow \underbrace{f(at)}_{f_1(t)}$.

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt; \quad F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(at) dt.$$

Замена: $y = at \rightarrow dy = a dt \rightarrow dt = \frac{dy}{a}; y_x = 0, y_e = \infty; t = \frac{y}{a}$

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-z/a \times y} f(y) \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{a} y} f(y) dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Получим с помощью этой теоремы дополнительные формулы для косинуса и синуса:

$$\frac{1}{a} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \rightarrow \sin at; \frac{1}{a} \frac{a^2}{a^2 + z^2} \rightarrow \sin at; \frac{a}{a^2 + z^2} \rightarrow \sin at$$

$$\frac{1}{a} \frac{\frac{z}{a}}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \rightarrow \cos at; \frac{1}{a} \frac{z \times a^2}{a^2 + z^2} \rightarrow \cos at; \frac{z}{a^2 + z^2} \rightarrow \cos at$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Линейность изображения.



Теорема: Если $F_i(z) \rightarrow f_i(t)$, то $\underbrace{\sum_{i=1}^n C_i F_i(z)}_{F(z)} \rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)}_{f(t)}$; ($C_i - const$).

Доказательство:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) dt = \sum_{i=1}^n C_i \int_0^{\infty} e^{-zt} f_i(t) dt;$$

По условию: $F_i(z) \rightarrow f_i(t)$, значит: $F_i(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_i(t) dt \rightarrow F(z) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(z)$

Пример: Найти оригинал от функции изображения: $F(z) = \frac{5}{z^2 + 4} + \frac{20z}{z^2 + 9}$

Решение: $F(z) = \frac{5}{2} \frac{2}{z^2 + 2^2} + 20 \frac{z}{z^2 + 3^2} \rightarrow f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t.$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Теорема сдвига.

Теорема: Если $F(z) \rightarrow f(t)$, то $\underbrace{F(z + \alpha)}_{F_1(z)} \rightarrow \underbrace{e^{-\alpha t} f(t)}_{f_1(t)}$

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(z+\alpha)t} f(t) dt = F(z + \alpha)$$

Получим дополнительные формулы для функции Хевисайда, синуса и косинуса по этой теореме:

$$\frac{1}{z} \rightarrow 1; \quad \frac{1}{z + \alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}; \quad \frac{a}{a^2 + z^2} \rightarrow \sin at; \quad \frac{a}{a^2 + (z + \alpha)^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \sin at;$$

$$\frac{z}{a^2 + z^2} \rightarrow \cos at; \quad \frac{z + \alpha}{a^2 + (z + \alpha)^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \cos at.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример №1: Найти оригинал от функции изображения:

$$F(z) = \frac{z+3}{z^2+2z+10}.$$

Замечание: Если дискриминант знаменателя меньше нуля, то из знаменателя выделяется полный квадрат:

$$F(z) = \frac{z+3}{z^2+2z+1+9} = \frac{z+1+2}{(z+1)^2+3^2} = \frac{z+1}{(z+1)^2+3^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{(z+1)^2+3^2};$$

$$\rightarrow f(t) = e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t = e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример №2: Найти оригинал от функции изображения:

$$F(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}$$

Корни знаменателя: $z^2+z-2=0 \rightarrow D=9>0 \rightarrow z_1=1, z_2=-2$.

Замечание: Если дискриминант знаменателя больше нуля, то выполняется разложение дроби на простейшие:

$$F(z) = \frac{z+5}{(z-1)(z+2)} \rightarrow F(z) = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+2)}$$

$$\rightarrow A(z+2) + B(z-1) = (z+5) \rightarrow Az + 2A + Bz - B = z + 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \rightarrow F(z) = 2 \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z+2)}$$

$$\rightarrow f(t) = 2e^t - e^{-2t}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример №3: Найти изображение от функции оригинала

$$f(t) = e^{3t} \sin^2 t.$$

$$f(t) = e^{3t} \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{3t} \cos 2t$$

$$\rightarrow F(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{z-3}{(z-3)^2 + 4};$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Теорема запаздывания.

Теорема: Если $F(z) \rightarrow f(t)$, то $\underbrace{e^{-zt} F(z)}_{F_1(z)} \rightarrow \underbrace{f(t - t_0)}_{f_1(t)}$ ($t_0 = \text{const}$).

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t - t_0) dt.$$

Замена: $y = t - t_0 \rightarrow t = y + t_0 \rightarrow dt = dy; y_n = -t_0; t_d = \infty$

$$F_1(z) = \int_{-t_0}^{\infty} e^{-z(y+t_0)} f(y) dy = \underbrace{\int_{-t_0}^0 e^{-z(y+t_0)} f(y) dy}_{I_1} + \int_0^{\infty} e^{-z(y+t_0)} f(y) dy.$$

Интеграл $I_1 = 0$, т.к. функция оригинала $f(y)$ отлична от нуля, только на интервале $[0; \infty)$.

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zy} e^{-zt_0} f(y) dy = e^{-zt_0} \int_0^{\infty} e^{-zy} f(y) dy = e^{-zt_0} F(z)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример №1: Найти оригинал от функции изображения:

$$F_1(z) = e^{3z} \frac{z-1}{4+(z-1)^2} \quad f_1(t) = ?$$

$$t_0 = -3 \rightarrow F(z) = \frac{z-1}{4+(z-1)^2} \rightarrow f(t) = e^t \cos 2t \rightarrow \text{ВМЕСТО } t \text{ В}$$

выражении функции оригинала подставляем: $t - t_0$

$$\rightarrow f_1(t) = e^{t+3} \cos 2(t+3)$$

Пример №2: Найти оригинал от функции изображения:

$$F_1(z) = e^{-2z} \frac{1}{z}$$

$$F(z) = \frac{1}{z}; \rightarrow f(t) = 1 \rightarrow t_0 = 2 \rightarrow f_1(t) = 1 - 2 = -1.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример №3: Найти оригинал от функции изображения

$$F_1(z) = e^z \frac{z}{1+z^2};$$

$$F(z) = \frac{z}{1+z^2}; \rightarrow f(t) = \cos t. \rightarrow t_0 = -1 \rightarrow f_1(t) = \cos(t+1).$$

Пример №4: Найти изображение от функции оригинала:

$$f_1(t) = e^{-2t} \sin(3t - 4).$$

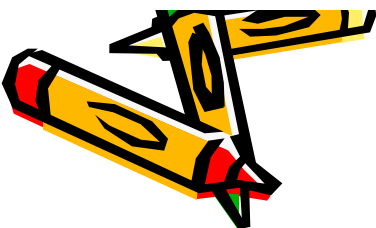
$$f_1(t) = e^{-2\left(t - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)} \sin\left(3\left(t - \frac{4}{3}\right)\right) = e^{-\frac{8}{3}} e^{-2\left(t - \frac{4}{3}\right)} \sin\left(3\left(t - \frac{4}{3}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow t_0 = 4/3. \rightarrow f(t) = e^{-\frac{8}{3}} e^{-2t} \sin(3t).$$

$$\rightarrow F(z) = e^{-\frac{8}{3}} \frac{3}{9 + (z+2)^2} \rightarrow F_1(z) = e^{-\frac{4}{3}z} e^{-\frac{8}{3}} \frac{3}{9 + (z+2)^2}$$

$$\rightarrow F_1(z) = e^{-\frac{4}{3}(z+2)} \frac{3}{9 + (z+2)^2}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Дифференцирование изображений и изображений производных.



Теорема: Если $F(z) \rightarrow f(t)$, то $(-1)^n F^{(n)}(z) \rightarrow t^n f(t)$

Получим дополнение формулы для Хевисайда \sin и \cos по этой теореме:

$$\frac{1}{z} \rightarrow 1; \quad F(z) = \frac{1}{z} \rightarrow F'(z) = -\frac{1}{z^2}; \quad -\left(-\frac{1}{z^2}\right) \rightarrow t; \quad \frac{1}{z^2} \rightarrow t;$$

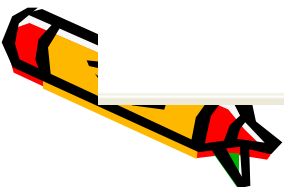
$$F''(z) = \frac{2}{z^3}; \quad \frac{2}{z^3} \rightarrow t^2; \quad F'''(z) = -\frac{2 \times 3}{z^4}$$

$$\frac{2 \times 3}{z^4} \rightarrow t^3; \quad \dots \quad \boxed{\frac{n!}{z^{n+1}} \rightarrow t^n}$$

Аналогично: $\frac{1}{z-\alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}; \quad \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}} \rightarrow t^n e^{-\alpha t}$

$$\frac{a}{a^2+z^2} \rightarrow \sin at; \quad F'(z) = -\frac{a \times 2z}{(a^2+z^2)^2}; \quad \frac{2az}{(a^2+z^2)^2} \rightarrow t \sin at.$$

$$\frac{z}{a^2+z^2} \rightarrow \cos at; \quad F'(z) = \frac{a^2+z^2-2z^2}{(a^2+z^2)^2} = \frac{a^2-z^2}{(a^2+z^2)^2}; \quad \frac{z^2-a^2}{(a^2+z^2)^2} \rightarrow t \cos at$$



Изображение производных.

Теорема: Если $F(z) \rightarrow f(t)$, то $\underbrace{F(z) - f(0)}_{F_1(z)} \rightarrow \underbrace{f'(t)}_{f_1(t)}$.

Доказательство:

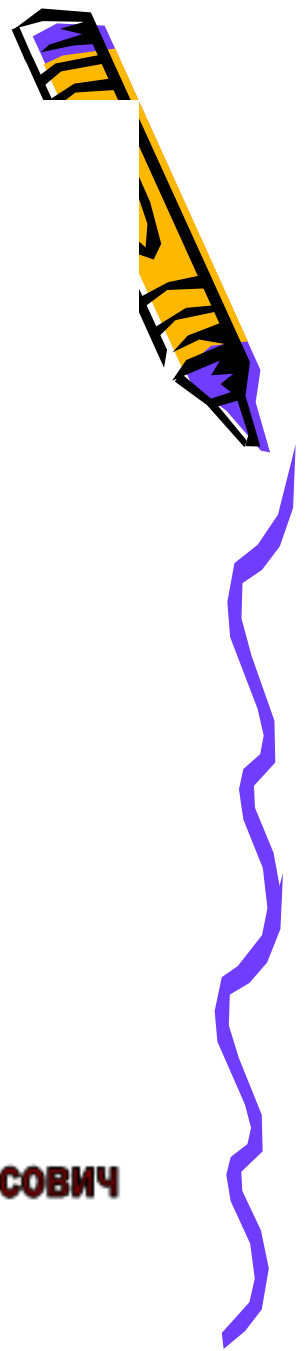
$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt$$

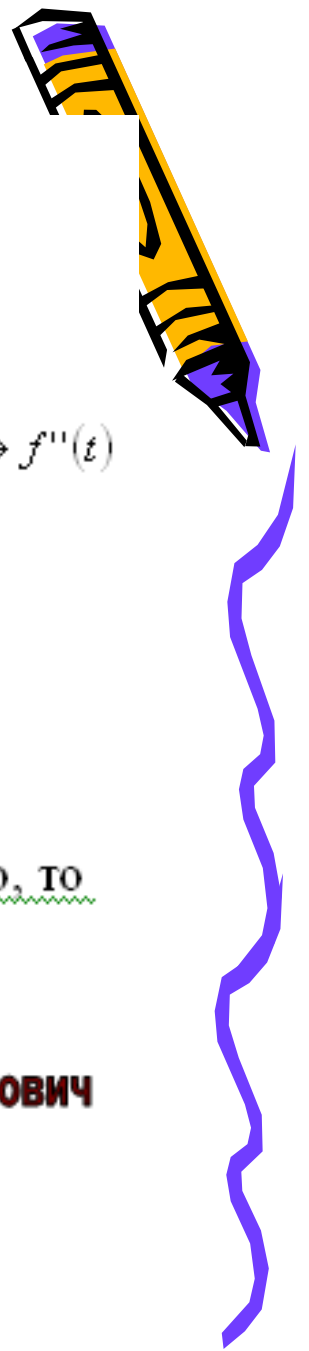
$$u = e^{-zt} \rightarrow du = -ze^{-zt} dt$$

По частям: $dv = f'(t) dt \rightarrow v = \int f'(t) dt = \int df(t) = f(t)$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= e^{-zt} f(t) \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{f(b)}{e^{zb}} - f(0) \right) + zF(z) = \\ &= 0 - f(0) + zF(z) = zF(z) - f(0) \end{aligned}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Изображение от второй производной.

$$zF(z) - f(0) \rightarrow f'(t); \quad F_1(z) \rightarrow f_1(t);$$

по теореме:

$$zF_1(z) - f_1(0) \rightarrow f_1'(t); \quad z(zF(z) - f(0)) - f'(0) \rightarrow f''(t); \quad z^2F(z) - zf(0) - f'(0) \rightarrow f''(t)$$

Изображение n-ой производной.

$$z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \rightarrow f^{(n)}(t).$$

Частный случай.

Если функция оригинала и её производные в т. $t = 0$ равны нулю, то

$$z^n F(z) \rightarrow f^{(n)}(t)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример №1: Найти изображение от функции оригинала:

$$f_1(t) = t \sin(at).$$

$$f(t) = \sin(at). \rightarrow F(z) = \frac{a}{z^2 + a^2}; \rightarrow F'(z) = \frac{-2za}{(z^2 + a^2)^2};$$

$$\rightarrow F_1(z) = (-1)^1 \frac{-2za}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{2za}{(z^2 + a^2)^2};$$

Пример №2: Найти оригинал от функции изображения

$$F(z) = \frac{2}{z^4};$$

$$F(z) = \frac{1}{3} \frac{2 \times 3}{z^4} = \frac{1}{3} \frac{3!}{z^4}; \rightarrow f(t) = \frac{1}{3} t^3.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример №3: Найти изображение от функции производной оригинала: $f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$.

1 способ

$$I = f(t) = \int f'(t)dt = \int e^{-t}(\cos t - \sin t)dt.$$

Интегрируем по частям:

$$u = e^{-t}; dv = (\cos t - \sin t)dt; du = -e^{-t}dt; v = \sin t + \cos t;$$

$$\rightarrow I = e^{-t}(\sin t + \cos t) + \int e^{-t}(\sin t + \cos t)dt.$$

Интегрируем по частям:

$$u = e^{-t}; dv = (\cos t + \sin t)dt; du = -e^{-t}dt; v = \sin t - \cos t;$$

$$\rightarrow I = e^{-t}(\sin t + \cos t) + e^{-t}(\sin t - \cos t) + \int e^{-t}(\cos t - \sin t)dt.$$

$$\rightarrow I = 2e^{-t}\sin t + I. \rightarrow I = f(t) = e^{-t}\sin t; \rightarrow f(0) = 0$$

$$\rightarrow F(z) = \frac{1}{(z+1)^2 + 1} \rightarrow F_1(z) = z \frac{1}{(z+1)^2 + 1}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



2 способ

$$f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t) = e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t.$$

$$\rightarrow F_1(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2+1} - \frac{1}{(z+1)^2+1} = \frac{z}{(z+1)^2+1}.$$

Вывод: искать изображение производных практически нужно по 2 способу.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Изображающее уравнение для решения дифференциальных уравнений произвольного порядка.



Дано: дифференциальное уравнение n -ого порядка:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad (1).$$

$$y(0) = y_0 - const$$

$$y'(0) = y_{10} - const$$

$$\text{н.у. } y''(0) = y_{20} - const$$

.....

$$y_0^{(n-1)} = y_{n-1,0} - const$$

Требуется определить: $y(t) = ?$

Решение:

Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (1) имеет изображение: $F(z) \rightarrow f(t)$.

Пусть искомое решение $y(t)$ и производные от него до $n-1$ порядка включительно, также имеют изображения:

$$Y(z) \rightarrow y(t); \quad ZY(z) - y(0) \rightarrow y'(t); \quad Z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0) \rightarrow y''(t);$$

$$Z^n Y(z) - z^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \rightarrow y^{(n)}(t)$$



Замечание: Если хотя бы одно из указанных изображений не существует, то дифференциальное уравнение в этом случае не имеет решений.

По определению изображение вычисляется через несобственный интеграл:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (2); \quad Y(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} y(t) dt \quad (3);$$

$$ZY(z) - y(0) = \int_0^{\infty} e^{-zt} y'(t) dt \quad (4);$$

$$Z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = \int_0^{\infty} e^{-zt} y''(t) dt \quad (5);$$

$$Z^n Y(z) - z^{n-1} y(0) - y^{(n-1)}(0) = \int_0^{\infty} e^{-zt} y^{(n)}(t) dt \quad (6).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Умножаем обе части уравнения (1) на e^{-zt} , вычисляем от левой и правой части несобственный интеграл на интервале $[0, \infty)$ и a_n, a_2, a_1, a_0 выносим за знак интеграла.

$$\begin{aligned}
 & a_n \int_0^{\infty} e^{-zt} y^{(n)}(t) dt + \dots + a_2 \int_0^{\infty} e^{-zt} y''(t) dt + a_1 \int_0^{\infty} e^{-zt} y'(t) dt + \\
 & + a_0 \int_0^{\infty} e^{-zt} y(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt
 \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляем (2)...(6) в (7):

$$\begin{aligned}
 & a_n (Z^n Y(z) - z^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)) + \dots \\
 & + a_2 (Z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)) + a_1 (ZY(z) - y(0)) + a_0 Y(z) = F(z)
 \end{aligned}$$

В полученном уравнении неизвестным является $Y(z)$, поэтому, всё, что касается этой неизвестной, оставляем в левой части, а остальное переносим в правую часть:

$$\begin{aligned}
 & Y(z) [a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0] = \\
 & = F(z) + \left\{ a_n (z^{n-1} y(0) + \dots + y^{(n-1)}(0)) + \dots + a_2 (zy(0) + y'(0)) + a_1 y(0) \right\}.
 \end{aligned}$$



В фигурной скобке функция и её производная вычисляются из н.у.
Обозначим многочлен n-ой степени в квадратной скобке через:

$$\varphi_n(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Обозначим многочлен в фигурной скобке через:

$$\psi_{n-1}(z) = a_n (z^{n-1} y_0 + \dots + y_{n-1,0}) + \dots + a_2 (z y_0 + y_{10}) + a_1 y_0.$$

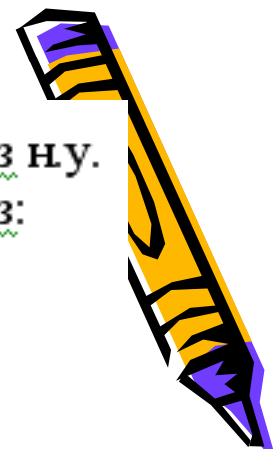
$$\text{Тогда: } Y(z) \varphi_n(z) = F(z) + \psi_{n-1}(z) \rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{F(z)}{\varphi_n(z)} + \frac{\psi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)} - \text{изображающее уравнение для}$$

дифференциального уравнения произвольного порядка.

Определив изображение $Y(z)$, из этого уравнения находится искомая функция оригинала $y(t)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Частный случай многочлена для дифференциального уравнения 2-го и 3-го порядка.

$$n = 2$$

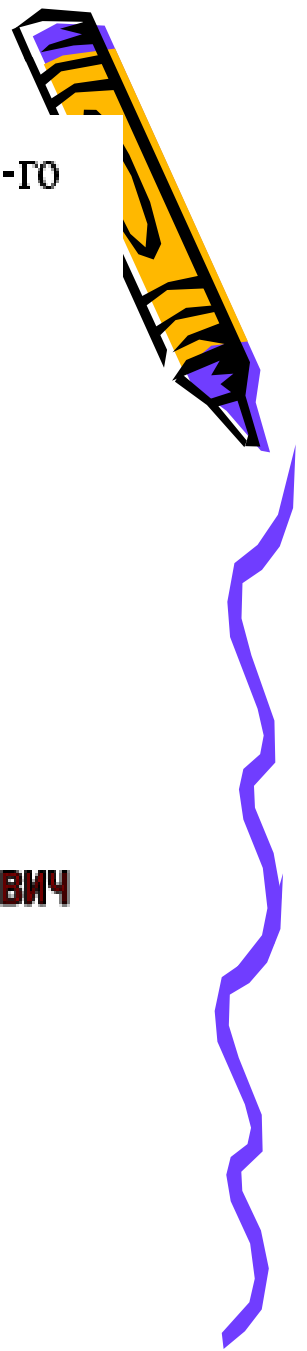
$$\phi_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0; \quad \psi_1(z) = a_2 (zy_0 + y_{10}) + a_1 y_0$$

$$n = 3$$

$$\phi_3(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0;$$

$$\psi_2(z) = a_3 (z^2 y_0 + zy_{10} + y_{20}) + a_2 (zy_0 + y_{10}) + a_1 y_0$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример №1: $y'' + 9y = 1$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\varphi_2(z) = z^2 + 9; \psi_1(z) = 0; F(z) = \frac{1}{z}; Y(z) = \frac{1}{z(z^2 + 9)};$$

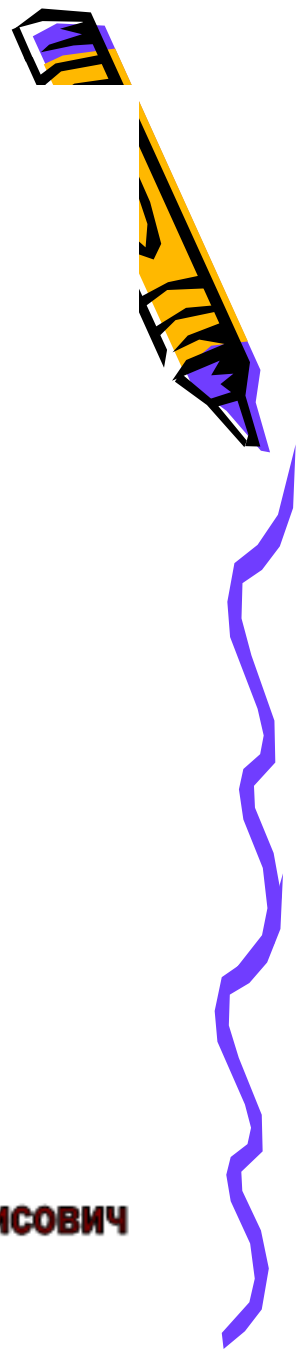
Разложим дробь на простейшие:

$$Y(z) = \frac{1}{z(z^2 + 9)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 9}; \rightarrow 1 = Az^2 + 9A + Bz^2 + Cz$$

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ C = 0; & A = \frac{1}{9}; \quad B = -\frac{1}{9}; \\ 9A = 1; \end{cases}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z(z^2 + 9)} = \frac{1}{9} + \frac{-1}{9} \frac{z + 0}{z^2 + 9} = \frac{1}{9} \frac{1}{z} - \frac{1}{9} \frac{z}{z^2 + 9};$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3t.$$





Проверка:

$$\rightarrow y'(t) = \frac{1}{3} \sin 3t. \rightarrow y''(t) = \cos 3t.$$

Подставим найденную функцию и её производные в исходное уравнение: $\cos 3t + 1 - \cos 3t = 1 \equiv 1$.

Получили тождество, значит решение верно.

Пример №2

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}; \text{ н.у. } y(0) = y'(0) = 0; y''(0) = 1.$$

$$\varphi_2(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = (z + 1)^3; \psi_1(z) = 1; F(z) = \frac{1}{(z + 1)^2};$$

$$Y(z) = \frac{1}{(z + 1)^5} + \frac{1}{(z + 1)^3}; \rightarrow Y(z) = \frac{1}{24} \frac{24}{(z + 1)^5} + \frac{1}{2} \frac{2}{(z + 1)^3};$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{24} t^4 e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} = \frac{1}{24} e^{-t} t^2 (t^2 + 12).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Замечание: Если н.у. заданы в ненулевой точке, то заменой переменных н.у. и дифференциальное уравнение преобразуются для случае нулевых условий.

Пример: $y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}$; н.у. $y(1) = y'(1) = 0$; $y''(1) = 1$.

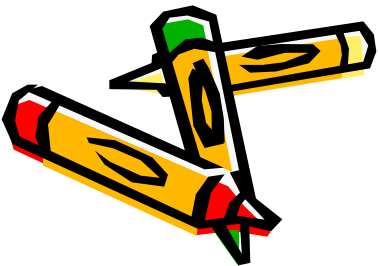
Замена:

$t = x + 1$; $\rightarrow x = t - 1$; при $t = 1 \rightarrow x = 0$;

$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = (x + 1)e^{-(x+1)}$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0$; $y''(0) = 1$.

После нахождения $y(x)$ осуществляется обратная замена: $x = t - 1$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Теорема свёртывания.

Теорема: Если $F_1(z) \rightarrow f_1(t)$ и $F_2(z) \rightarrow f_2(t)$, то

$$F(z) = F_1(z) \times F_2(z) \rightarrow f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Замечание: Теорема свёртывания применяется, если функция изображения имеет достаточно сложное выражение. В этом случае эта функция разбивается на произведение 2-х более простых, от каждой из которых определяется соответствующая функция оригинала ($f_1(t), f_2(t)$), а окончательная функция оригинала ($f(t)$) определяется по теореме свёртывания.

Доказательство:

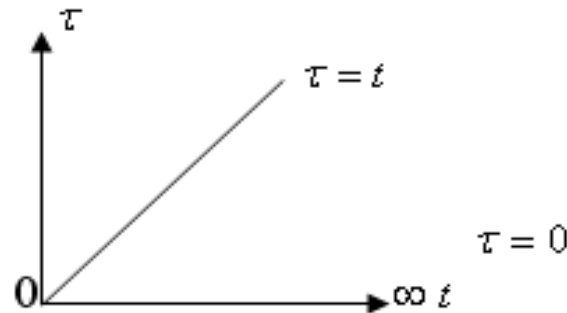
$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-zt} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau dt$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Восстановим по пределам интегрирования область интегрирования и составим двукратный интеграл, для которого t будет являться функцией, а τ - аргументом.



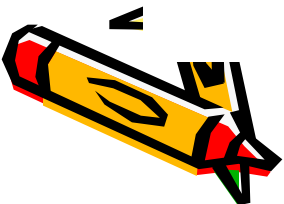
$$F(z) = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-zt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \int_{\tau}^{\infty} e^{-zt} f_2(t-\tau) dt d\tau =$$

замена: $y = t - \tau \rightarrow dy = dt, y_H = 0, y_B = \infty, t = y + \tau,$

$$F(z) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \int_0^{\infty} e^{-z(y+\tau)} f_2(y) dy d\tau = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} f_1(\tau) \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zy} f_2(y) dy}_{F_2(z)} d\tau =$$

$$= F_2(z) \int_0^{\infty} e^{-z\tau} f_1(\tau) d\tau = F_1(z) \times F_2(z)$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Пример: $y'' + y = t$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\varphi_2(z) = z^2 + 1; \psi_1(z) = 0; F(z) = \frac{1}{z^2}; Y(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 1)};$$

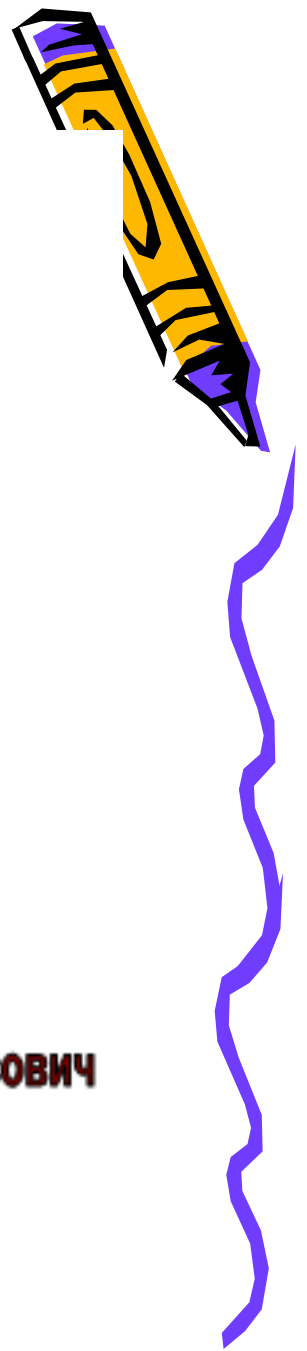
$$Y(z) = F_1(z) \times F_2(z) = \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{z^2 + 1}; \rightarrow f_1(t) = t; f_2(t) = \sin t.$$

$$\rightarrow f(t) = \int_0^t \tau \sin(t - \tau) dt;$$

По частям: $u = \tau; dv = \sin(t - \tau)d\tau; du = d\tau; v = \cos(t - \tau)$.

$$\rightarrow I = \tau \cos(t - \tau) \Big|_0^t - \int_0^t \cos(t - \tau) d\tau = t + \sin(t - \tau) \Big|_0^t = t - \sin t.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$f(t) = \operatorname{sh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z + \alpha} \right) = \frac{z + \alpha - z + \alpha}{2(z - \alpha)(z + \alpha)} = \frac{2\alpha}{2(z^2 - \alpha^2)} \rightarrow F(z) = \frac{\alpha}{z^2 - \alpha^2}$$

$$f(t) = \operatorname{ch}(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z + \alpha} \right) = \frac{z + \alpha + z - \alpha}{2(z - \alpha)(z + \alpha)} = \frac{2z}{2(z^2 - \alpha^2)} \rightarrow F(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha^2}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

