№ 1 Преобразование Лапласа, понятие изображения и оригинала.

Дано: действительная функция $f(t)$, которая определена, т.е. отлична от нуля на интервале $[0,\infty)$ и является ограниченной функцией на этом интервале, т.е. $\left|f(t)\right| < Me^{-kt}$, $(M, k - const; M, k > 0)$ и ФКП $\varphi(z) = e^{-zt}$.

Преобразуем ФКП, используя формулу Эйлера: $e^{z} = e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i\sin b); z = x + iy$;

$$\varphi(z) + e^{-zt} = e^{-xt-iyt} = e^{-xt}(\cos yt - i\sin yt) \qquad (1)$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$F(t) = \int_0^\infty y(z)f(t)dt = \int_0^\infty \underbrace{e^{-zt}}_{1} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-xt}(\cos yt - i\sin yt)f(t)dt.$$

$$\mathrm{F(z)} = \underbrace{\int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{f(t)\cos(yt)\,dt}}_{\mathrm{I}_1} - i\underbrace{\int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{f(t)\sin(yt)\,dt}}_{\mathrm{I}_2}; \quad (2)$$

Докажем, что интегралы, входящие в (2) сходятся, для этого оценим значение интеграла I_1:

$$\left|I_1\right| = \left|\int_0^\infty e^{-xt}\cos yt f(t)dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-xt}\right|\left|\cos yt\right|\left|f(t)\right|dt < \int_0^\infty e^{-xt}Me^{-kt}dt = M\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t(x+k)}dt =$$

$$= M\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-t(x+k)}}{-(x+k)}\Big|_o^b = -\frac{M}{x+k}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{b(x+k)}} - 1\right) = \frac{M}{x+k} \ne \infty;$$

$$\mathrm{F(z)} = \underbrace{\int_0^\infty e^{-zt}\,\mathrm{f(t)\,dt}}_{\text{Изображение}} \quad (3)$$ - сходится.

Определение: Изображением называется функция F(z), вычисленная по формуле (3) от функции $f(t)$, называемой оригиналом.

Обозначение вычисления изображения: $F(z) \to f(t)$.

Замечание: Аргументом изображения является выражение, стоящее в степени экспоненты, перед аргументом функции оригинала и с обратным знаком.

Основное свойство изображения:

Если функция-оригинал умножается на константу, то соответствующая функция-изображение умножается на туже самую константу: $cF(z) \to cf(t)$.

Единственность изображения, изображение функции Хевисайда, синуса и косинуса.

Теорема: Если функция имеет изображение, то оно единственно.

Изображение функции Хевисайда: $f(t)=\begin{cases}1, t\in[0,\infty)\\0, t\in(-\infty,0]\end{cases}$

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-zt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-zt}dt=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_0^b=-\frac{1}{z}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^z b}-1\right)=\frac{1}{z};\ \frac{1}{z}\to 1.$$

Изображение синуса: $f(t)=\sin t$

$$F(z)\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-zt}\sin t=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-zt}\sin t dt=\lim_{b\to ki}I\Big|_0^b \qquad (1)$$

$$I=\int e^{-zt}\sin t dt=-e^{-zt}\cos t-z\int e^{-zt}\cos t dt=\begin{pmatrix}u=e^{-zt}\to du=-ze^{-zt}dt;\\ dv=\sin t dt\to v=-\cos t;\ dv=\cos t dt\to v=\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=-e^{-zt}\cos t-z\left(e^{-zt}\sin t+z\int e^{-zt}\sin t dt\right)$$

$$I=-e^{-zt}(\cos t+z\sin t)-z^2I;\ (1+z^2)I=-e^{-zt}(\cos t+z\sin t)\to I=-\frac{e^{-zt}(\cos t+z\sin t)}{(1+z^2)} \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$F(z)=-\frac{1}{1+z^2}\lim_{b\to\infty}e^{-zt}(\cos t+z\sin t)\Big|_0^b=-\frac{1}{1+z^2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\cos b+z\sin b}{e^{zb}}-1\right)=\frac{1}{1+z^2};$$

$$\frac{1}{1+z^2}\to\sin t.$$

Изображение косинуса: f(t)=cost

$$F(z)\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-zt}\cos t=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-zt}\cos t dt=\lim_{b\to ki}I\Big|_0^b \qquad (3)$$

$$I=\int e^{-zt}\cos t dt=e^{-zt}\sin t+z\int e^{-zt}\sin t dt=\begin{pmatrix}u=e^{-zt}\to du=ze^{-zt}dt;\\ dv=\cos t dt\to v=\sin t;\ dv=\sin t dt\to v=-\cos t\end{pmatrix}=$$

$$=e^{-zt}\sin t+z\left(-e^{-zt}\cos t-z\int e^{-zt}\cos t dt\right)$$

$$I=-e^{-zt}(\sin t-z\cos t)-zI\to I=\frac{e^{-zt}(\sin t-z\cos t)}{(1+z^2)} \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (3): $F(z)=\frac{1}{1+z^2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sin b+z\cos b}{e^{zb}}+z\right)=\frac{z}{1+z^2}$

$$\frac{z}{1+z^2}\to\cos t.$$

Изображение функции с изменённым масштабом.

Теорема: Если $F(z) \to f(t)$, то $\underbrace{\frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)}_{F_1(z)} \to \underbrace{f(at)}_{f_1(t)}$.

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_1(t)dt;\;\; F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(at)dt.$$

Замена: $y = at \to dy = adt \to dt = \dfrac{dy}{a}; y_н = 0, y_в = \infty; t = \dfrac{y}{a}$

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-z/a \times y} f(y)\frac{1}{a}dy = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{a}y} f(y)dy = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)$$

Получим с помощью этой теоремы дополнительные формулы для косинуса и синуса:

$$\frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} \to \sin at;\; \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2+z^2} \to \sin at;\; \frac{a}{a^2+z^2} \to \sin at$$

$$\frac{1}{a}\frac{\frac{z}{a}}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} \to \cos at;\; \frac{1}{a}\frac{z \times a^2}{a^2+z^2} \to \cos at;\; \frac{z}{a^2+z^2} \to \cos at$$

Линейность изображения.

Теорема: Если $F_i(z) \to f_i(t)$, то $\underbrace{\sum_{i=1}^n C_i F_i(z)}_{F(z)} \to \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)}_{f(t)};\;\; (C_i - const)$.

Доказательство:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt} \sum_{i=1}^n C_i f_i(t)dt = \sum_{i=1}^n C_i \overbrace{\int_0^\infty e^{-zt} f_i(t)dt}^{Fi(z)};$$

По условию: $F_i(z) \to f_i(t)$, значит: $F_i(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_i(t)dt \to F(z) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(z)$

Пример: Найти оригинал от функции изображения: $\mathrm{F(z)} = \dfrac{5}{z^2+4} + \dfrac{20z}{z^2+9}$

Решение: $\mathrm{F(z)} = \dfrac{5}{2}\dfrac{2}{z^2+2^2} + 20\dfrac{z}{z^2+3^2} \;\to\; \mathrm{f(t)} = \dfrac{5}{2}\sin 2t + 20\cos 3t.$

Теорема смещения.

Теорема: Если $F(z) \to f(t)$, то $\underbrace{F(z+\alpha)}_{F_1(z)} \to \underbrace{e^{-\alpha t} f(t)}_{f_1(t)}$

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_1(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{-\alpha t} f(t)dt \int_0^\infty e^{-(z+\alpha)t} f(t)dt = F(z+\alpha)$$

Получим дополнительные формулы для функции Хевисайда, синуса и косинуса по этой теореме:

$$\frac{1}{z} \to 1; \ \frac{1}{z+\alpha} \to e^{-\alpha t}; \quad \frac{a}{a^2+z^2} \to \sin at; \ \frac{a}{a^2+(z+x)^2} \to e^{-\alpha t} \sin at;$$

$$\frac{z}{a^2+z^2} \to \cos at; \ \frac{z+\alpha}{a^2+(z+\alpha)^2} \to e^{-\alpha t} \cos at.$$

Пример №1: Найти оригинал от функции изображения:

$$\mathrm{F(z)} = \frac{z+3}{z^2+2z+10}.$$

Замечание: Если дискриминант знаменателя меньше нуля, то из знаменателя выделяется полный квадрат:

$$\mathrm{F(z)} = \frac{z+3}{z^2+2z+1+9} = \frac{z+1+2}{(z+1)^2+3^2} = \frac{z+1}{(z+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(z+1)^2+3^2};$$

$$\to \mathrm{f(t)} = e^{-t}\mathrm{co3t} + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t = e^{-t}(\cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t).$$

Пример №2: Найти оригинал от функции изображения:

$$F(z) = \frac{z+5}{z^2+z-2}\ .$$

Корни знаменателя: $z^2+z-2=0 \to D=9>0 \to z_1=1,\ \ z_2=-2$.

Замечание: Если дискриминант знаменателя больше нуля, то выполняется разложение дроби на простейшие:

$$F(z) = \frac{z+5}{(z-1)(z+2)} \to F(z) = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+2)}$$

$$\to A(z+2)+B(z-1)=(z+5) \to Az+2A+Bz-B=z+5$$

$$\to \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases} \to \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \to F(z) = 2\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z+2)}$$

$$\to f(t) = 2e^t - e^{-2t}\ .$$

Пример №3: Найти изображение от функции оригинала $f(t) = e^{3t}\sin^2 t$.

$$f(t) = e^{3t}\frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{3t}\cos 2t$$

$$\to F(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} - \frac{1}{2}\frac{z-3}{(z-3)^2+4};$$

Теорема запаздывания.

Теорема: Если $F(z) \to f(t)$, то $\underbrace{e^{-zt}F(z)}_{F_1(z)} \to \underbrace{f(t-t_0)}_{f_1(t)} \quad (t_0 - const)$.

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_1(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t-t_0)dt.$$

Замена: $y = t - t_0 \to t = y + t_0 \to dt = dy; y_н = -t_0; t_d = \infty$

$$F_1(z) = \int_{-t_0}^{\infty} e^{-z(y+t)} f(y)dy = \underbrace{\int_{-t_0}^{0} e^{-z(y+t_0)} f(y)dy}_{I_1} + \int_0^{\infty} e^{-z(y+t_0)} f(y)dy.$$

Интеграл $I_1 = 0$, т.к. функция оригинала $f(y)$ отлична от нуля, только на интервале $[0;\infty)$.

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zy} e^{-zt_0} f(y)dy = e^{-zt_0}\int_0^{\infty} e^{-zy} f(y)dy = e^{-zt_0}F(z)$$

Пример №1: Найти оригинал от функции изображения:

$$F_1(z) = e^{3z}\frac{z-1}{4+(z-1)^2} \qquad f_1(t) = ?$$

$t_0 = -3 \to F(z) = \dfrac{z-1}{4+(z-1)^2} \to f(t) = e^t \cos 2t \to$ вместо t в выражении функции оригинала подставляем: $t - t_0$

$$\to f_1(t) = e^{t+3}\cos 2(t+3)$$

Пример №2: Найти оригинал от функции изображения:

$$F_1(z) = e^{-2z}\frac{1}{z}$$

$F(z) = \dfrac{1}{z}; \to f(t) = 1 \to t_0 = 2 \to f_1(t) = 1 - 2 = -1.$

Пример №3: Найти оригинал от функции изображения

$$F_1(z) = e^z \frac{z}{1+z^2};$$

$$F(z) = \frac{z}{1+z^2}; \rightarrow f(t) = \cos t. \rightarrow t_0 = -1 \rightarrow f_1(t) = \cos(t+1).$$

Пример №4: Найти изображение от функции оригинала:

$$f_1(t) = e^{-2t}\sin(3t - 4).$$

$$f_1(t) = e^{-2\left(t-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)}\sin\left(3\left(t-\frac{4}{3}\right)\right) = e^{-\frac{8}{3}}e^{-2\left(t-\frac{4}{3}\right)}\sin\left(3\left(t-\frac{4}{3}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow t_0 = 4/3. \rightarrow f(t) = e^{-\frac{8}{3}}e^{-2t}\sin(3t).$$

$$\rightarrow F(z) = e^{-\frac{8}{3}}\frac{3}{9+(z+2)^2} \rightarrow F_1(z) = e^{-\frac{4}{3}z}\,e^{-\frac{8}{3}}\frac{3}{9+(z+2)^2}$$

$$\rightarrow F_1(z) = e^{-\frac{4}{3}(z+2)}\frac{3}{9+(z+2)^2}$$

Дифференцирование изображений и изображений производных.

Теорема: Если $F(z) \to f(t)$, то $(-1)^n F^{(n)}(z) \to t^n f(t)$

Получим дополнение формулы для Хевисайда sin и cos по этой теореме:

$$\frac{1}{z} \to 1; \quad F(z) = \frac{1}{z} \to F'(z) = -\frac{1}{z^2}; \quad -\left(-\frac{1}{z^2}\right) \to t; \quad \frac{1}{z^2} \to t;$$

$$F''(z) = \frac{2}{z^3}; \quad \frac{2}{z^3} \to t^2; \quad F''(z) = -\frac{2\times 3}{z^4}$$

$$\frac{2\times 3}{z^4} \to t^3; \ \dots \qquad \frac{n!}{z^{n+1}} \to t^n.$$

Аналогично: $\frac{1}{z-\alpha} \to e^{-2t}; \qquad \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}} \to t^n e^{-\alpha t}.$

$$\frac{a}{a^2+z^2} \to \sin at; \quad F'(z) = -\frac{a\times 2z}{\left(a^2+z^2\right)^2}; \quad \frac{2az}{\left(a^2+z^2\right)^2} \to t\sin at.$$

$$\frac{z}{a^2+z^2} \to \cos at; \quad F'(z) = \frac{a^2+z^2-2z^2}{\left(a^2+z^2\right)^2} = \frac{a^2-z^2}{\left(a^2+z^2\right)^2}; \quad \frac{z^2-a^2}{\left(a^2+z^2\right)^2} \to t\cos at$$

Изображение производных.

Теорема: Если $F(z) \to f(t)$, то $\underbrace{F(z) - f(0)}_{F_1(z)} \to \underset{f_1(t)}{f'(t)}.$

Доказательство:

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_1(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt} f'(t)dt$$

$$u = e^{-zt} \to du = -ze^{-zt}dt$$

По частям: $dv = f'(t)dt \to v = \int f'(t)dt = \int df(t) = f(t)$

$$F_1(z) = e^{-zt} f(t)\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{f(b)}{e^{zb}} - f(0)\right) + zF(z) =$$

$$= 0 - f(0) + zF(z) = zF(z) - f(0)$$

Изображение от второй производной.

$$zF(z) - f(0) \to f'(t);\; F_1(z) \to f_1(t);$$

по теореме:

$$zF_1(z) - f_1(0) \to f_1'(t);\; z(zF(z) - f(0)) - f'(0) \to f''(t);\; z^2F(z) - zf(0) - f'(0) \to f''(t)$$

Изображение n-ой производной.

$$z^nF(z) - z^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \to f^{(n)}(t).$$

Частный случай.

Если функция оригинала и её производные в т. $t = 0$ равны нулю, то

$$z^nF(z) \to f^{(n)}(t)$$

Пример №1: Найти изображение от функции оригинала:

$$f_1(t) = t\sin(at).$$

$$f(t) = \sin(at). \to F(z) = \frac{a}{z^2 + a^2}; \quad \to F'(z) = \frac{-2za}{(z^2 + a^2)^2};$$

$$\to F_1(z) = (-1)^1 \frac{-2za}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{2za}{(z^2 + a^2)^2};$$

Пример №2: Найти оригинал от функции изображения

$$F(z) = \frac{2}{z^4};$$

$$F(z) = \frac{1}{3}\frac{2\times 3}{z^4} = \frac{1}{3}\frac{3!}{z^4}; \quad \to f(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Пример №3: Найти изображение от функции производной оригинала: $f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$.

1 способ

$I = f(t) = \int f'(t)dt = \int e^{-t}(\cos t - \sin t)dt$.

Интегрируем по частям:

$u = e^{-t}; dv = (\cos t - \sin t)dt; du = -e^{-t}dt; v = \sin t + \cos t;$

$\to I = e^{-t}(\sin t + \cos t) + \int e^{-t}(\sin t + \cos t)dt$.

Интегрируем по частям:

$u = e^{-t}; dv = (\cos t + \sin t)dt; du = -e^{-t}dt; v = \sin t - \cos t;$

$\to I = e^{-t}(\sin t + \cos t) + e^{-t}(\sin t - \cos t) + \int e^{-t}(\cos t - \sin t)dt$.

$\to I = 2e^{-t}\sin t + I. \to I = f(t) = e^{-t}\sin t; \to f(0) = 0$

$$\to F(z) = \frac{1}{(z+1)^2+1} \to F_1(z) = z\frac{1}{(z+1)^2+1}$$

2 способ

$f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t) = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t.$

$$\to F_1(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2+1} - \frac{1}{(z+1)^2+1} = \frac{z}{(z+1)^2+1}.$$

Вывод: искать изображение производных практически нужно по 2 способу.

Изображающее уравнение для решения дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Дано: дифференциальное уравнение *n*-ого порядка:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_a y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \qquad (1).$$

н.у.

$$y(0) = y_0 - const$$
$$y'(0) = y_{10} - const$$
$$y''(0) = y_{20} - const$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_0^{(n-1)} = y_{n-1,0} - const$$

Требуется определить: $y(t) = ?$

Решение:

Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (1) имеет изображение: $F(z) \to f(t)$.

Пусть искомое решение $y(t)$ и производные от него до $n-1$ порядка включительно, также имеют изображения:

$$Y(z) \to y(t); \quad ZY(z) - y(0) \to y'(t); \quad Z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) \to y''(t);$$
$$Z^nY(z) - z^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) \to y^{(n)}(t)$$

Замечание: Если хотя бы одно из указанных изображений не существует, то дифференциальное уравнение в этом случае не имеет решений.

По определению изображение вычисляется через несобственный интеграл:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt \quad (2); \; Y(z) = \int_0^\infty e^{-zt} y(t)\,dt \quad (3);$$

$$ZY(z) - y(0) = \int_0^\infty e^{-zt} y'(t)\,dt \quad (4);$$

$$Z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = \int_0^\infty e^{-zt} y''(t)\,dt \quad (5);$$

$$Z^nY(z) - z^{n-1}y(0) - y^{(n-1)}(0) = \int_0^\infty e^{-zt} y^{(n)}\,dt \quad (6).$$

Умножаем обе части уравнения (1) на e^{-zt}, вычисляем от левой и правой части несобственный интеграл на интервале $[0,\infty)$ и a_n, a_2, a_1, a_0 выносим за знак интеграла.

$$a_n\int_0^\infty e^{-zt}y^{(n)}(t)\,dt+\ldots+a_2\int_0^\infty e^{-zt}y''(t)\,dt+a_1\int_0^\infty e^{-zt}y'(t)\,dt+ \\ +a_0\int_0^\infty e^{-zt}y(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt \quad . \qquad (7)$$

Подставляем (2)…(6) в (7):

$$a_n\left(Z^nY(z)-z^{n-1}y(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)\right)+\ldots$$

$$+a_2\left(Z^2Y(z)-zy(0)-y'(0)\right)+a_1\left(ZY(z)-y(0)\right)+a_0Y(z)=F(z)$$

В полученном уравнении неизвестным является $Y(z)$, поэтому, всё, что касается этой неизвестной, оставляем в левой части, а остальное переносим в правую часть:

$$Y(z)\left[a_nz^n+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0\right]=$$

$$=F(z)+\left\{a_n\left(z^{n-1}y(0)+\ldots+y^{(n-1)}(0)\right)+\ldots+a_2\left(zy(0)+y'(0)\right)+a_1y(0)\right\}.$$

В фигурной скобке функция и её производная вычисляются из н.у.

Обозначим многочлен n-ой степени в квадратной скобке через:

$$\varphi_n(z)=a_nz^n+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0.$$

Обозначим многочлен в фигурной скобке через:

$$\psi_{n-1}(z)=a_n\left(z^{n-1}y_0+\ldots+y_{n-1,0}\right)+\ldots+a_2\left(zy_0+y_{10}\right)+a_1y_0.$$

Тогда: $Y(z)\varphi_n(z)=F(z)+\psi_{n-1}(z)\rightarrow$

$$Y(z)=\frac{F(z)}{\phi_n(z)}+\frac{\psi_{n-1}(z)}{\phi_n(z)}$$ - изображающее уравнение для дифференциального уравнения произвольного порядка.

Определив изображение $Y(z)$, из этого уравнения находится искомая функция оригинала $y(t)$.

Частные случаи многочлена для дифференциального уравнения 2-го и 3-го порядка.

$n = 2$

$\phi_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0; \quad \psi_1(z) = a_2(zy_0 + y_{10}) + a_1 y_0$

$n = 3$

$\phi_3(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0;$

$\psi_2(z) = a_3(z^2 y_0 + zy_{10} + y_{20}) + a_2(zy_0 + y_{10}) + a_1 y_0$

Пример №1: $y'' + 9y = 1$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0.$

$$\varphi_2(z) = z^2 + 9;\ \psi_1(z) = 0;\ F(z) = \frac{1}{z};\ Y(z) = \frac{1}{z(z^2+9)};$$

Разложим дробь на простейшие:

$$Y(z) = \frac{1}{z(z^2+9)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 9}; \to 1 = Az^2 + 9A + Bz^2 + Cz$$

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ C = 0; \qquad A = \frac{1}{9};\ \ B = -\frac{1}{9}; \\ 9A = 1; \end{cases}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z(z^2+9)} = \frac{\frac{1}{9}}{z} + \frac{\frac{-1}{9}z + 0}{z^2+9} = \frac{1}{9}\frac{1}{z} - \frac{1}{9}\frac{z}{z^2+9};$$

$$\to y(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t.$$

Проверка:

$$\to y'(t) = \frac{1}{3}\sin 3t. \to y''(t) = \cos 3t.$$

Подставим найденную функцию и её производные в исходное уравнение: $\cos 3t + 1 - \cos 3t = 1 \equiv 1.$

Получили тождество, значит решение верно.

Пример №2

$y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0; y''(0) = 1.$

$\varphi_2(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = \left(z+1\right)^3$; $\psi_1(z) = 1$; $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$;

$Y(z) = \dfrac{1}{(z+1)^5} + \dfrac{1}{(z+1)^3}; \to Y(z) = \dfrac{1}{24}\dfrac{24}{(z+1)^5} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(z+1)^3};$

$\to y(t) = \dfrac{1}{24}t^4e^{-t} + \dfrac{1}{2}t^2e^{-t} = \dfrac{1}{24}e^{-t}t^2(t^2 + 12).$

Замечание: Если н.у. заданы в ненулевой точке, то заменой переменных н.у. и дифференциальное уравнение преобразуются для случае нулевых условий.

Пример: $y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}$; н.у. $y(1) = y'(1) = 0; y''(1) = 1.$

Замена:

$t = x + 1; \to x = t - 1$; при $t = 1 \to x = 0$;

$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = (x+1)e^{-(x+1)}$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0; y''(0) = 1.$

После нахождения $y(x)$ осуществляется обратная замена : $x = t - 1.$

Теорема свёртывания.

Теорема: Если $F_1(z) \to f_1(t)$ и $F_2(z) \to f_2(t)$, то

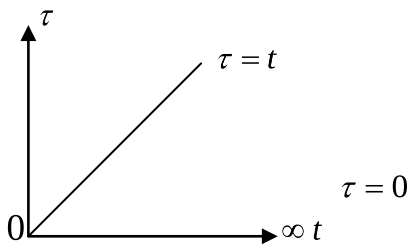
$$F(z) = F_1(z) \times F_2(z) \to f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Замечание: Теорема свёртывания применяется, если функция изображения имеет достаточно сложное выражение. В этом случае эта функция разбивается на произведение 2-х более простых, от каждой из которых определяется соответствующая функция оригинала $(f_1(t), f_2(t))$, а окончательная функция оригинала $(f(t))$ определяется по теореме свёртывания.

Доказательство:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-zt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt$$

Восстановим по пределам интегрирования область интегрирования и составим двукратный интеграл, для которого t будет являться функцией, а τ - аргументом.



$$F(z) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-zt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-zt} f_2(t-\tau) dt d\tau =$$

$$\text{замена}: y = t - \tau \to dy = dt;\ y_H = 0; y_B = \infty, t = y + \tau;$$

$$F(z) = \int_0^\infty f_1(\tau) \int_0^\infty e^{-z(y+\tau)} f_2(y) dy d\tau = \int_0^\infty e^{-z\tau} f_1(\tau) \underbrace{\int_0^\infty e^{-zy} f_2(y) dy}_{F_2(y)} d\tau =$$

$$= F_2(z) \int_0^\infty e^{-z\tau} f_1(\tau) d\tau = F_1(z) \times F_2(z)$$

Пример: $y'' + y = t$; н.у. $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\varphi_2(z) = z^2 + 1;\ \psi_1(z) = 0;\ F(z) = \frac{1}{z^2};\ Y(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)};$$

$$Y(z) = F_1(z) \times F_2(z) = \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{z^2+1};\quad \to f_1(t) = t; f_2(t) = \sin t.$$

$$\to f(t) = \int_0^t \tau \sin(t - \tau)\, dt;$$

По частям: $u = \tau; dv = \sin(t - \tau)d\tau; du = d\tau; v = \cos(t - \tau)$.

$$\to I = \tau\cos(t - \tau)\Big|_0^t - \int_0^t \cos(t - \tau)d\tau = t + \sin(t - \tau)\Big|_0^t = t - \sin t\,.$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$\boxed{f(t) = \mathrm{sh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z + \alpha}\right) = \frac{z + \alpha - z + \alpha}{2(z - \alpha)(z + \alpha)} = \frac{2\alpha}{2\left(z^2 - \alpha^2\right)} \to \qquad F(z) = \frac{\alpha}{z^2 - \alpha^2}$$

$$\boxed{f(t) = \mathrm{ch}(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z + \alpha}\right) = \frac{z + \alpha + z - \alpha}{2(z - \alpha)(z + \alpha)} = \frac{2z}{2\left(z^2 - \alpha^2\right)} \to \qquad F(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha^2}$$

Оригинал	Изображение
$\frac{1}{z}$	1
$\frac{1}{1+z^2}$	$\sin t$
$\frac{z}{1+z^2}$	$\cos t$
$\frac{a}{a^2+z^2}$	$\sin at$
$\frac{z}{a^2+z^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{z+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{a}{a^2+(z+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\sin \alpha t$
$\frac{z+\alpha}{a^2+(z+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
$\frac{n!}{z^{n+1}}$	t^n
$\frac{n!}{(z+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$
$\frac{2z}{(a^2+z^2)^2}$	$t\sin at$
$\frac{z^2-a^2}{(a^2+z^2)^2}$	$t\cos at$
$\frac{\alpha}{z^2-\alpha^2}$	$\mathrm{sh}(\mathrm{at})$
$\frac{z}{z^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}(\mathrm{at})$