

# МАТРИЦЫ

Фёдоров Павел Борисович  
Сайт лекций по математике:  
[Fedorovkniga.jimdo.com](http://Fedorovkniga.jimdo.com)

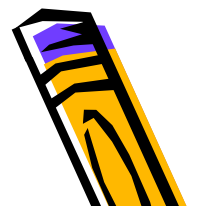


Матрицы и их виды  
Действия над матрицами  
Обратная матрица

Ранг матрицы. Матричный способ решения  
системы уравнений и её совместность



# Матрицы и их виды



Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов ( $m, n$  – определяют размерность матрицы).

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц:

1. Квадратная матрица:  $m = n$ .
2. Матрица строка:  $A_n = (a_{11}a_{12}\dots a_{1n})$ .

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





3. Матрица столбец:  $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ .

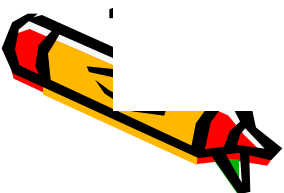
4. Диагональная – называется квадратная матрица у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали.

5. Единичная матрица – называется диагональная матрица, у которой на главной

диагонали расположены одни единицы:  $E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Ноль матрица:  $O_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



# Действия над матрицами



1. Равенство матриц – две матрицы одинаковой размерности равны, если равны их соответствующие элементы:  $A_{m \times n} = B_{m \times n}$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$
2. Транспонирование – матрица  $A^T$  является транспонированной по отношению к исходной матрице  $A$ , если строки первой матрицы являются столбцами другой матрицы и наоборот.

Например:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$       $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





3. Умножение на константу – матрица  $C_{m \times n} = KA_{m \times n}$ , если  $c_{ij} = Ka_{ij}$ .

4. Сложение матриц – матрица  $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$ , если  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

5. Умножение матриц – матрица  $C_{m \times n} = A_{m \times l} B_{l \times n}$ , если  $c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$ .

Замечание: Перемножать можно такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание: Размерность матрицы определяется числом строк первой матрицы и числом столбцов второй матрицы.

Замечание: Произведение двух матриц в общем случае не перестановочно (не коммутативно), т.е.  $AB \neq BA$ . В частном случае произведение двух матриц может быть перестановочно, если эти матрицы квадратные и имеют одинаковую размерность.

Пример:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; AB = C_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2(-1) + 3 \times 5 & 1 + 8 + 18 \\ -2 + 15 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}.$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



# Обратная матрица



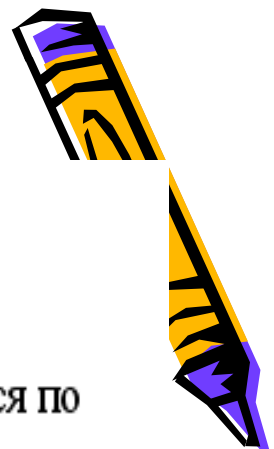
Определение: Квадратная матрица  $A^{-1}$  называется обратной по отношению к исходной матрице  $A$ , если выполняется следующее неравенство:  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Определение: Квадратная матрица называется невыраженной, если определитель составленный из этой матрицы не равен нулю.

Определение: Матрица  $\tilde{A}$  называется присоединённой по отношению к исходной матрице  $A$ , если она составлена из алгебраических дополнений транспонированной матрицы

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





Пример:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$

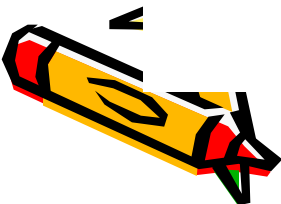
Теорема: Любая невырожденная матрица имеет обратную, которая вычисляется по следующей формуле:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$

Доказательство:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Замечание: На главной диагонали по определению расположены значения определителя.

Замечание: На побочной диагонали элементы равны нулю по 9 свойству определителей.



# Ранг матрицы. Матричный способ решения системы уравнений и её совместность



Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок определителя отличного от нуля, который можно составить из исходной матрицы  $RgA$ .

Матричный способ решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \rightarrow Ax = b; \quad \text{- матричное уравнение системы}$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович







Левую и правую часть матричного уравнения умножаем на обратную матрицу:

$$AA^{-1}x = A^{-1}B; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad Ex = A^{-1}B \rightarrow x = A^{-1}B.$$

Определение: Система называется совместной, если она имеет одно или бесчисленное множество решений, и не совместной, если не имеет решений.

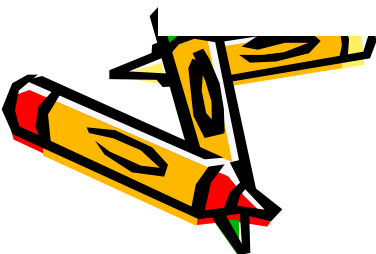
Определение: Матрица  $\bar{A}$  называется расширенной, если к матрице  $A$  присоединить

столбец свободных членов:  $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}.$

Условие совместности системы Кронекера - Капелле:

Определение: Система является совместной, если ранг матрицы  $A$  равен рангу расширенной матрицы  $\bar{A}$ :  $RgA = Rg\bar{A}$ .

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



### Случаи решения системы уравнений:

1. Система имеет единственное решение, если  $RgA = Rg\bar{A} = m = n$ .
2. Система имеет лишние уравнения, если  $RgA = Rg\bar{A} < m$ , в этом случае отбрасываются любые уравнения  $(m - RgA)$  и система приводится к 1-му случаю.
3. Система имеет бесчисленное множество решений, если  $RgA = Rg\bar{A} < n$ , в этом случае любые  $m$  неизвестные выражаются через остальные  $(n - RgA)$  неизвестных.
4. Система решений не имеет, если  $RgA \neq Rg\bar{A}$ .

© 2010, Фёдоров Павел Борисович

