

2. Образы окружностей и лучей. Найдем образы окружностей $|z| = \rho$ и лучей $\arg z = \alpha$ (полярная координатная сетка) при отображении функцией Жуковского. Полагая в (6) $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получаем $u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$, откуда

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (8)$$

Рассмотрим окружность

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (9)$$

($\rho > 0$ — фиксировано). Из (8) следует, что при отображении функцией Жуковского образом окружности (9) является эллипс

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (10)$$

с полуосями $a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, $b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$ (так как $a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1$). Исключая из уравнений (10) параметр φ , при $\rho \neq 1$ уравнение этого эллипса можно записать в каноническом виде

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1. \quad (11)$$

Отметим, что при замене ρ на $1/\rho$ ($\rho \neq 1$) эллипс (10) остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную. На рис. 95 показаны окружности $|z| = \rho$, $\rho > 1$, ориентированные по часовой стрелке, и их образы — эллипсы (11); из (10) видно, что эти эллипсы ориентированы также по часовой стрелке. На рис. 96 показаны окружности $|z| = \rho$ при $0 < \rho < 1$ и их образы — эллипсы (11); при этом ориентация меняется на противоположную: окружность $|z| = \rho$, ориентированная против часовой стрелки, переходит в эллипс (11), ориентированный по часовой стрелке.

При $\rho = 1$ эллипс (10) вырождается в отрезок $[-1, 1]$, проходящий дважды, т. е. окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, проходящий дважды (рис. 95, 96).

в луч $(-\infty, -1]$, продолженным до бесконечности (рис. 97).

Таким образом, функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводит окружности $|z| = \rho$ в эллипсы (11), а лучи $\arg z = \alpha$ — в ветви гипербол (14); фокусы всех эллипсов (11) и гипербол (14) расположены в точках $w = \pm 1$; любой эллипс (11) пересекается с любой гиперболой (14) под прямым углом.

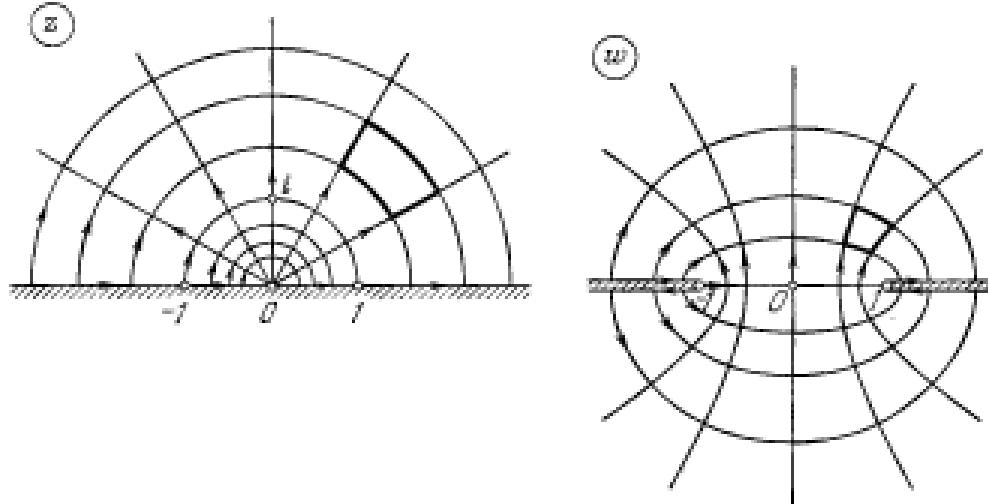


Рис. 97

Пример 15. Пусть D — внешность единичного круга (рис. 95). Найдём образ области D при отображении функцией Жуковского, однолистной в этой области (пример 14а). \square

Способ 1. Образами окружностей $|z| = \rho$, $\rho > 1$ являются эллипсы (11), которые заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 95).

Способ 2. Луч

$$z = re^{i\alpha}, \quad 1 < r < +\infty \quad (15)$$

переходит в кривую

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \alpha, \quad 1 < r < +\infty, \quad (16)$$

которая является частью (половиной) ветви гиперболы (13). При изменении α от 0 до 2π кривые (16) заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 95). Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 95).

Отметим, что при этом отображении окружность $|z| = 1$, ориентированная по часовой стрелке (граница области D), переходит в разрез по отрезку $[-1, 1]$; подробнее: полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ переходит в верхний берег разреза, а полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0$ в нижний берег разреза (рис. 98).

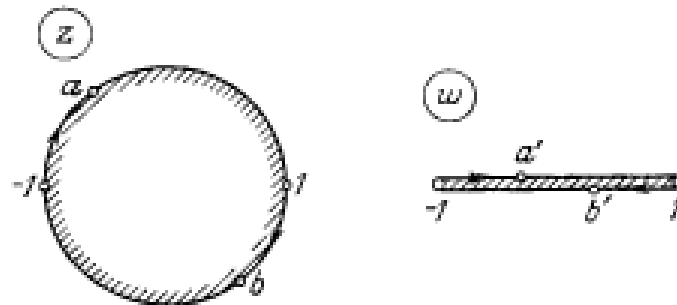


Рис. 98

Образно говоря, окружность $|z| = 1$ «сжимается» в разрез по отрезку $[-1, 1]$ с сохранением ориентации. \square

Пример 16. Как и в примере 15, получаем, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 96). Это утверждение вытекает также из примера 15 и замечания 2.

Отметим, что при этом отображении окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки (граница круга $|z| < 1$),

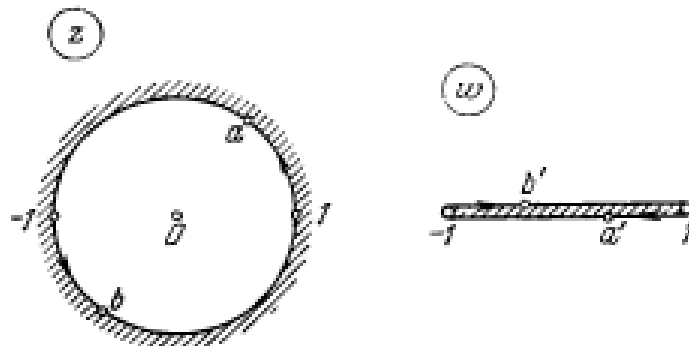


Рис. 99

переходит в разрез по отрезку $[-1, 1]$, ориентированный по часовой стрелке. Подробнее: полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ переходит в нижний берег разреза, а полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0$ — в верхний берег разреза (рис. 99). \square

Пример 17. Как и в примере 15, получаем, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно отображает верхнюю

полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, 1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 97). При этом отображении

а) луч $(-\infty, -1]$ переходит в верхний берег разреза по лучу $(-\infty, -1]$,

б) полуинтервал $[-1, 0)$ — в нижний берег разреза $(-\infty, -1]$,

в) полуинтервал $(0, 1)$ — в нижний берег разреза $[1, +\infty)$,

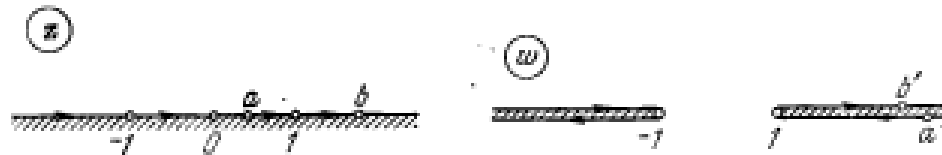


Рис. 100

г) луч $[1, +\infty)$ — в верхний берег разреза $[1, +\infty)$ (рис. 100). \square

Пример 18. Из примера 17 и замечания 2 вытекает, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. \square

На рис. 95—97 жирными линиями отмечены кольцевые секторы на плоскости z и их образы на плоскости w при отображении функцией Жуковского. Следующие частные случаи таких отображений часто используются в практике конформных отображений.

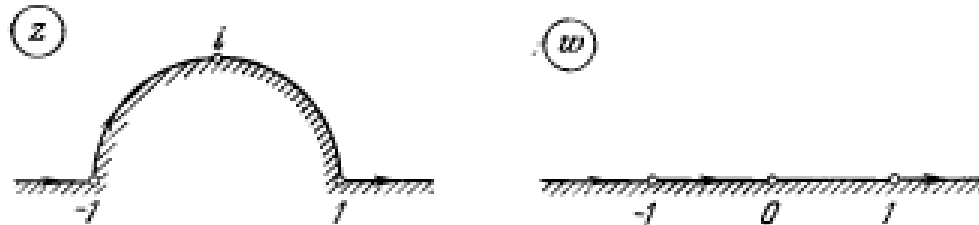


Рис. 101

Пример 19. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает

а) область $\text{Im } z > 0, |z| > 1$ (рис. 101) на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (из рис. 95);

б) полукруг $|z| < 1, \text{Im } z < 0$ (рис. 102) на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$; полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ (рис. 102) на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$ (из рис. 96);

в) область $|z| > \rho > 1$ (рис. 103) на внешность эллипса (11) (из рис. 95); круг $|z| < \rho < 1$ (рис. 103) на внешность эллипса (11) (из рис. 96);

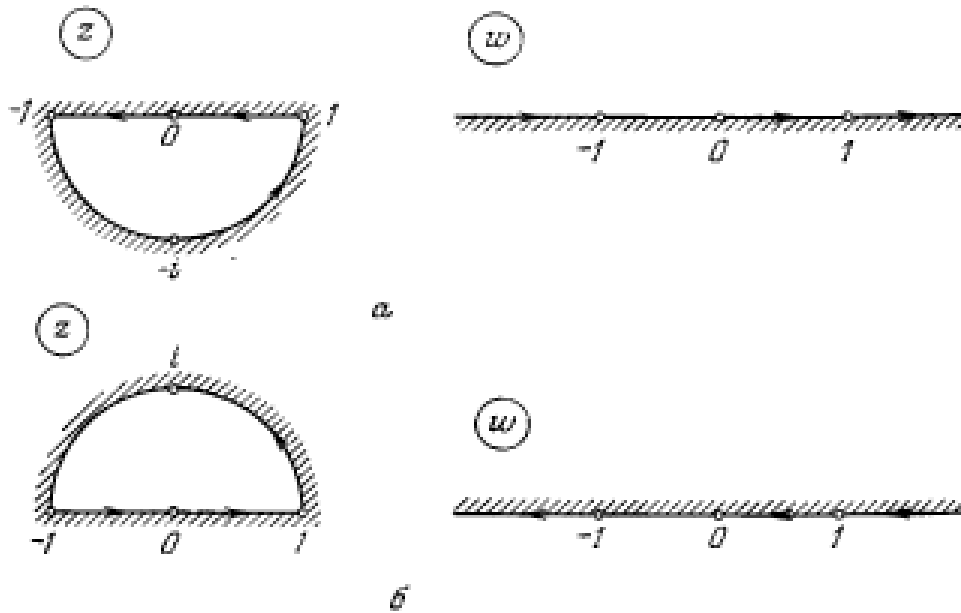


Рис. 102

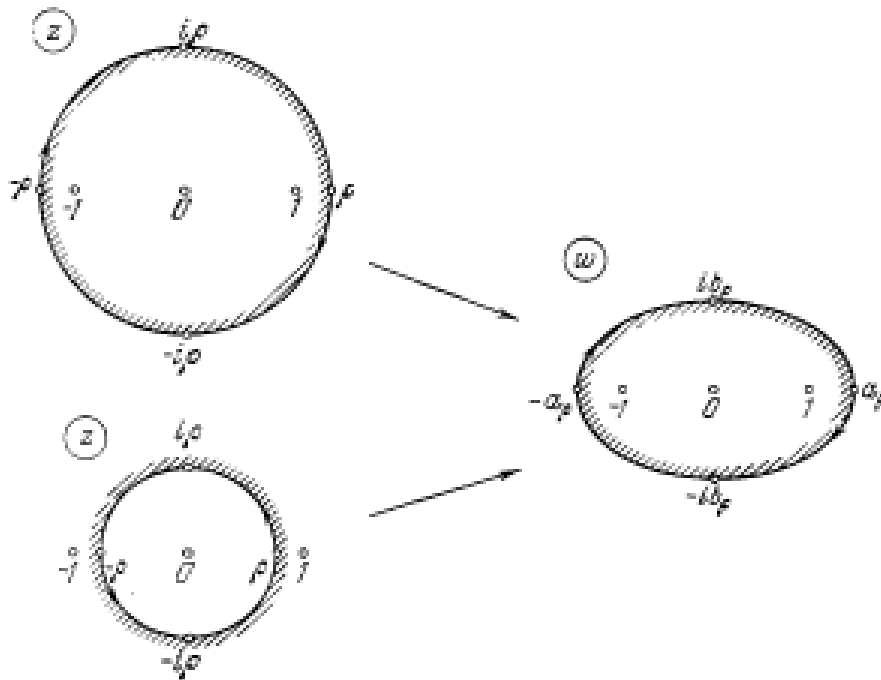


Рис. 103

г) сектор $\alpha < \arg z < \pi - \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 104) на внешность гиперболы (14) (из рис. 97);